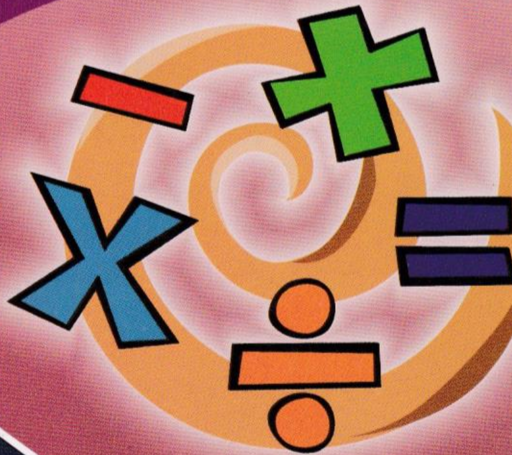


شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب



دویمه برخه

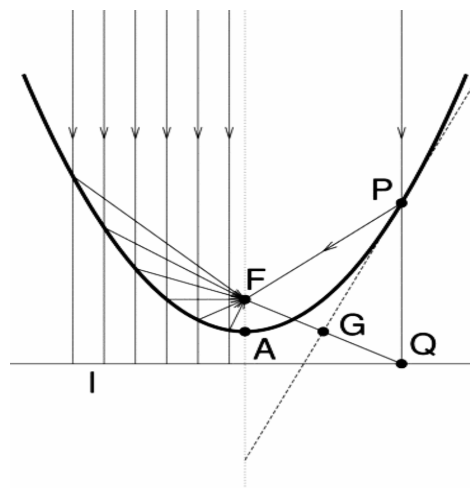
دویم غځېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب (دویمه برخه)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میرې،، شینواری

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د لیکوونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکوونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړی برخه

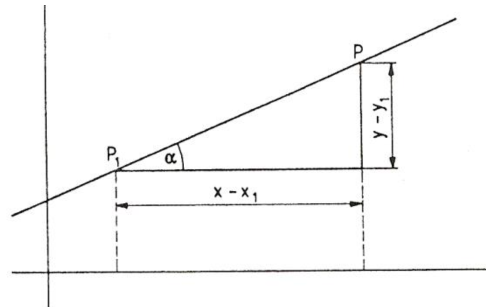
۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

په دې برخه کی یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنستیزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت ښایي.

۱۶ . ۱ کرښه

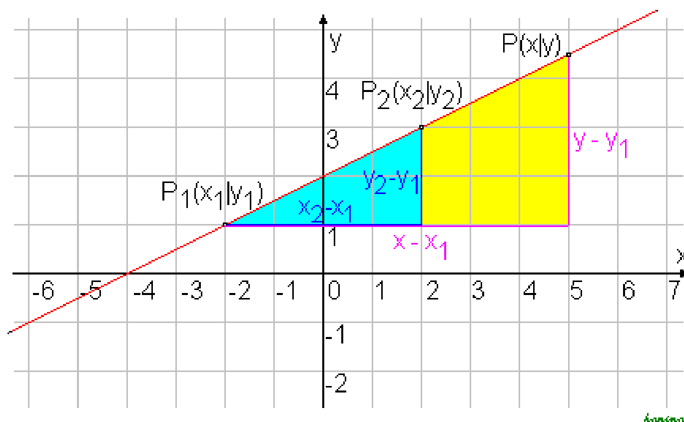
د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چی یوه کرښه یواځنۍ کره تعین کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چی د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی۰



نو د کرښی د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځېره دې وکتل شي(لاددې ځېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې ځخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو b = x1= 0, y1 سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دې(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (ځیره ش ۱۶ . ۲) د جګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

$$m = (y - y1) /(x - x1)$$

او

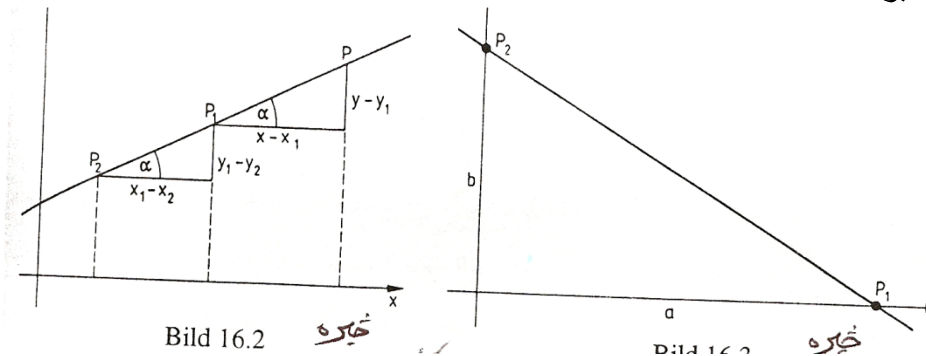
m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دئ:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي

$y = y0$ (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کربښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کربښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکربښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دئ ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

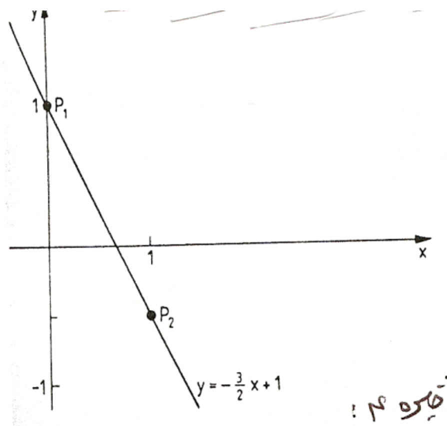
بیلګه ۱۶ . ۴ :

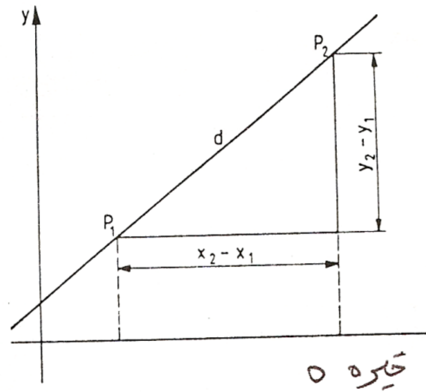
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};..........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او ـ ۵





بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي يی دادي(A(3,1),B(- 1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2+(5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کږمټی) چی (يو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك يو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يواځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څيرو

اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2

الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه څرګنديږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .

ب) د برابرونونو سيستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کربنی یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم $3x-y=2$

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

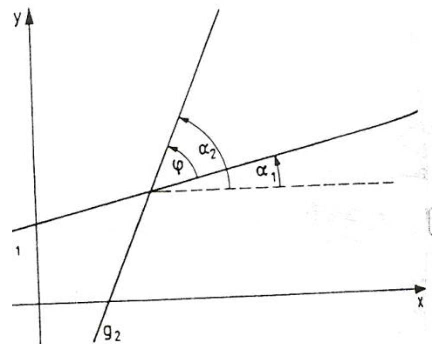
ناپای ډیر ې اوبيوني يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کربنو

$$g1 : \quad y = m1x + b1 \qquad g2 : \quad y = m2x + b2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کربنو جګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (څ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کربنی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دي.

دا په دې پورې اړه لري چې ايا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تيره دی.

بيلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو يو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې يوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې يو په بل (نيغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

يعنی د$m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0$ $(m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe)$ نيغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګوناليتی Orthogonalität(يو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بيلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی $g2$ برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي($P(2,-1)$ تيريږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) څغلي اوبوونه:

الف) د $g2$ کرښی ميلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي $g2$برابرون لپاره باور لري : $y+1=-2(x-2)$ همداسی $y = -2x +3$

ب) د $g2$ کرښي ميلان ياجګيدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د $g2$ کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بيلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کيږي چي د($P1(1/3,-1/6)$ ټکی تيريږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1)$ او($P3(-2,-1)$ تيريږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له $P2, P3$ ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی ميلان يا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکی کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

---

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دئ او د کرښي برابرون څنګه دئ چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

يعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S اوP تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P ټکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

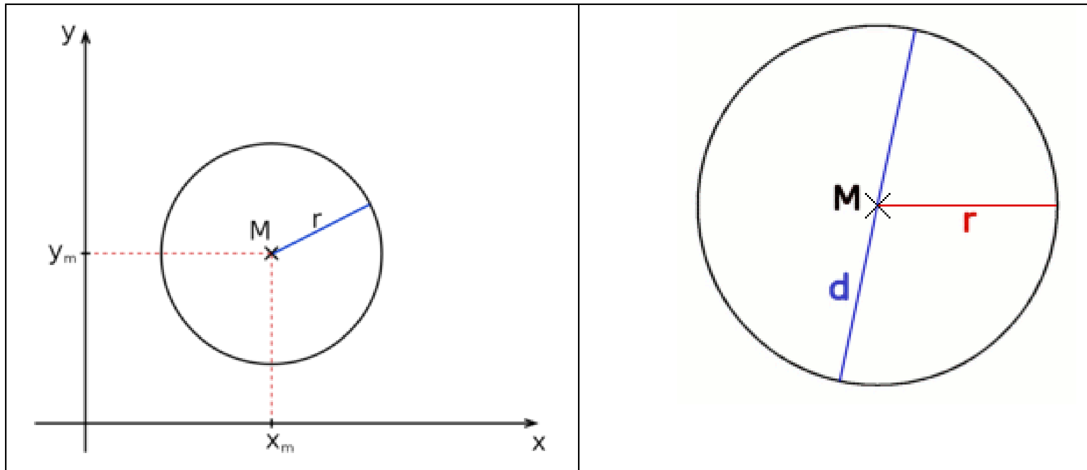
د (P0 (0,0څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

۱۶ . ۲ ګردئ (داېره)

داېره(ګردئ) د ټولو هغو ټکو ډيرئ(سټ) ده، چی د يوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته يی وړانګه وايو او په rيی په نخښه کوو.
فورمال داسې ويل کيږي يا دا پيژند ورکوو، چې داېره (ګردئ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډيرئ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$



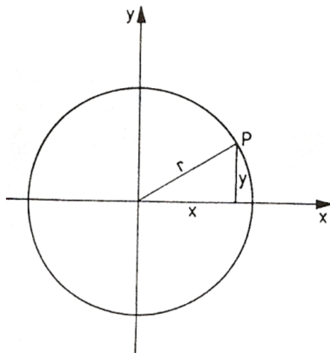


Bild 16.7

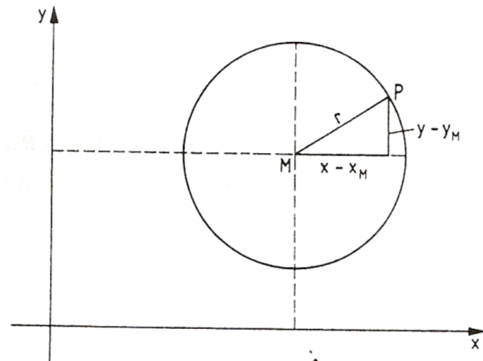


Bild 16.8

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r
سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې ګردی ځانګړي حالت او د کواردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د گردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (څیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د) پیوتاګوراس د جملی له مخی (د گردي په خوښنه ټکي P(x,y (لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د گردۍ منځټکي برابرون چی د گردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د گردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د گردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د گردي برابرون تغیر وومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د گردیبرابرون د څلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په څیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د گردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ٠
که د گردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د گردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د گردۍ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د څلوری پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 +(y-3)^2 = 16$

ګردی منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بيلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردی برابرون وليکی چې منځټکی يی($M(2;0$ وي او په کوم چې ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبيونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د P ټکی د ګردی برابرون پوره کوي $(6-2)^2 +(4 - 3)^2 = r^2$

له دې څخه د ګردی وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردی برابرون:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

ګردی او کرښه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سيکانتې)

۲ – کرښه ګردی په يوه ټکي کی لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردی تيريدونکی، لنډ : تيرېدونې)

د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردينات بايد د ګردی اوکرښی برابرون پوره کړي سړی د کرښي برابرون د ګردی په برابرونونو کی ږدي(y يا x پسی حل يا اوبی شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبيونې يا ځوابونه لري، يو رييل ډبل اوبی او يا هنځ رييل اوبی کيدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بيلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځايونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و يو بل ته لري؟

$g1: 2x+y=4, g2=2x+y=12, g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردۍبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$

ددې ځوابونو $x=0, y=4$ او $x=8/5, y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekant سکانت) وي .

که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$

د ډبل اوبونې $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره $g2$ یو تانجنت دئ .

که $g3: y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$

دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

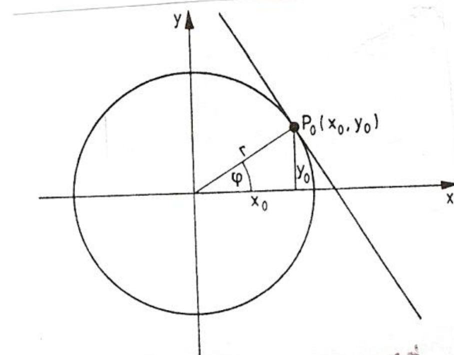


Bild 16.9

په ګردي $(x^2+y^2 = r^2)$ (څیره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P_0(x_0,y_0)$د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دئ

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \dfrac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0/y_0; \text{..........}(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$y-y=-(x0/y0)(x-x0) \Leftrightarrow xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه($P0(\pm r,0)$او($P0(0,\pm r$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

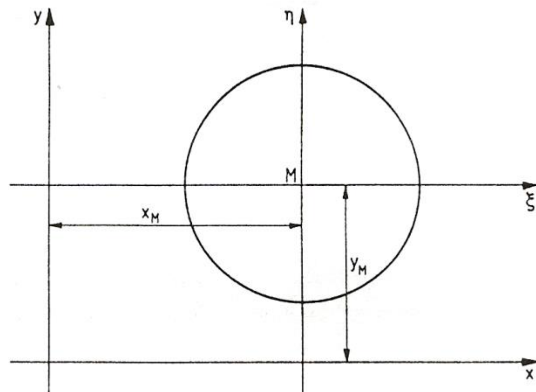


Bild 16.10 ځېره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري

$x0^2+y0^2 = 16$ او $-12 x0 + 4y0 = 16$

که دا لاينيزبرابرون د y_0 په لور حل شي ، نو په x_0 کي يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو($P_{01}(0,4)$ او($P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 <=> y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 <=> y=(-3/4)x-5.$$

د ګردئ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ ځيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2; ....(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم يو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړيکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M , \eta=y-y_M ; ....(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا د y,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي($P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردئ تنجنت برابرو په ګردئ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

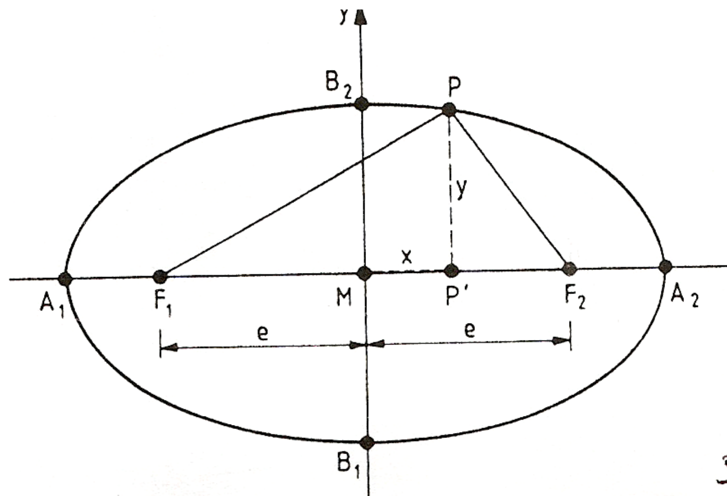
په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو
$x1 = x2 = -5$
سره تنجنت وکا ږو(کیږدو). برابرون یې څنګه دي؟
اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:
$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$
$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$
او له دې لاس ته راځي
$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$
د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه
$$x1 = x2 = -5$$
د دواړو ګردۍ ټکو په ګردیبرابرون کې ځایوو:
$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوری‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$
او
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بیضوي(هګۍ) یا ایلیپسی Die Ellipse

بیضوي یا ایلیپسی د ټولو هغو ټکو P ډیرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټینګ په ځایټکو، داسې په نامه د ایلیپسی د سوزونټکویا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څیرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سیومتریك دx - محور باندې ځایوو یا ږدو او د ثابت واټنزیاتون لیکو:
$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:
$$\underline{F}1F2 = 2e;$$



خېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځننتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چې په اليپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(څلورې يا مربع ته جګيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (ريښه رابيليږي

(څلورې يا مربع کوو)

-- ------------

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتيب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \qquad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad <=>$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2) = 1 \qquad (16,20)$$

د منځټکي(M(0,0سره د ايليپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی y=±b. ايليپسی (ښيره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاو b د دواړو نيمحورونو اوږدوالی دی

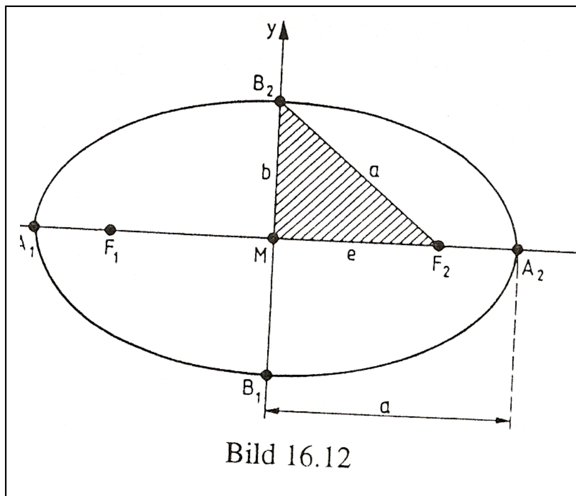


Bild 16.12

لکه د اليپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړيکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

$$\underline{F1B2} + \underline{F2B2} = 2a$$

د $\underline{F1B2} = \underline{F2B2}$ له امله له دې لاس ته راځي $\underline{F2B2} = a$

ښيره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دريګوډي MF2B2 کی د اړيکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پيژندل کيږي.

که منځټکی M کواوردينات Mx ; My ولري او د ايليپسی محورونه د کواورديناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ايليپسی د يوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16 , 2 1)$$

د ايليپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

د پورته فرمول څلولو وروسته د ايليپسی ټوليز(عمومي) جوړښت پيژندل کيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16 , 22)$$

د ايلپسی مساواتو ټوليزه بڼه يا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپير(پرتله يا مقايسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 ځله وونی يا ضريبونه يو له بل توپير لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بيلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ايليپسی منځټکی، نيممحور، او سوزونټکي لټول کيږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبنونه : د ايلپسي برابرون د منځټکي بڼه يا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کيږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلورئ پوره کونه يا مربعتکميلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ويش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردينات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکيږي او د نيممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کيږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څيره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

بيلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ايلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3سره لټول کيږي، په کوم چی ټکي(P1(-3,3او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبښونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ايلپسي براون داسی دي

$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$

ټيکي P1 او P2 بايد د ايليپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)
$a = 2$ او له دې سره د دويم برابرون څخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ايليپسی لټونکی برابون داسی دی:

$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$

بيلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ايلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کيږي.

اوبیونه : که الف) $y=x+2$ د ایلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76=0$$

د څلوری - یامربع برابرونونو اوبی :

$$x_1=-2 , x_2=-3,8$$

د غوڅښکي ابسځیز یا پروتمحور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

$$y_1=0 , y_2=-1,8$$

اړه لري.

ب) د y رامدځ ته شوې څلوری(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رییل اوبیونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ایلیپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول یا هیوپربل د ټولو هغو ټکو ډیرۍ ده، د کومو لپاره چې د کمون یا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکو F_1 او F_2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

یامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ایلیپسی کی دلته هم موړ کره ټاکو (څیره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون یا واټنکمښت| $|PF_1-PF_2|=2a$ او (څیره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $\overline{F_1F_2}=2e$ (څیره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2=b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې یا بل چیرې، چې کوم څه لاندې کرښیز شوي وي، دا په زیاتو ادبیاتو کې پورته کرښیز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښیز شوي وي او که پورته، توپیر نه لري یا همغه څه دي.

یو ایلیپسی برابرون ته ورته تلنه (برخهٔ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربنودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16.24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي ($M(0,0)$ سره

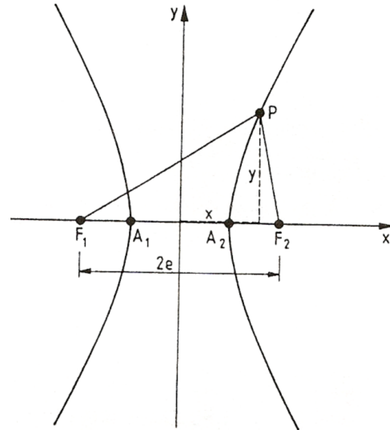


Bild 16.13 ځېره

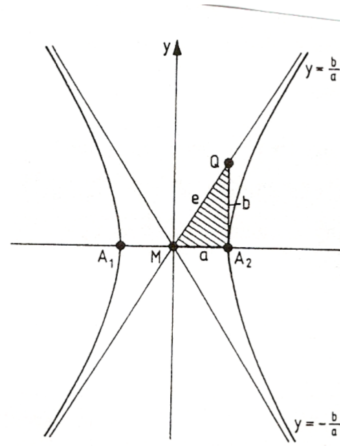


Bild 16.14 ځېره

د y=0 لپاره x=±a دی ، دا په دې مانا چی هوپربول د x - محور په ټکي

(A1(-a,0 او(A2(a,0کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کيږي۰ ګورو چی دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نو لاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a}.x.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د x -> ± oe لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښی y = ±(b/a).x ته نزدې کوي (ځيره ۱۶ . ۱۴)
له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسيمپتوتی بلل کږي.
د (۱۶ . ۲۳) له امله MQ = e دی .
که منځټکی M کواوردينات xM ,yM ولري او سيومتريك غبرګ د کورديناتو محور ته ځغلي، نو د يوه په خوښه هوپربول ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(x_M, y_M)$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټوليز جوړښت جوتيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهيوپربول برابرون ټوليزه بڼه يا فورم
دلته د ايليپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) يا په څټ ډول د x^2 او y^2 ځله ووني بدله مخنښه لري
($A \cdot B < 0$) ټوليز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لارښود کړي،

$$(y-y_M)^2/b^2-(x-x_M)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څيره چی يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بيلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کيږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبيونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بڼه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د ځلوری پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ويشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کيږي:

$$x_M = - 3 ,y_M = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{144/16+25/14}=13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي يی

(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او(F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسيمپتوټي يو له بل سره کوم کونجونه ترې يعنی جوړوي يا اسيمپتوټی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟

اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ يا د $a=2\ ,b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسيمپتوټی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$

او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسيمپتوټی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi=3/2,\varphi=56{,}31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپتوټو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi=2\varphi=112{,}62°$

داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يی په سرچينه او ککرټګي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په $a1$ او $b1$ سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په $e1$ سره ښايو.

نو باور لري: $a1=8\ ,\ b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

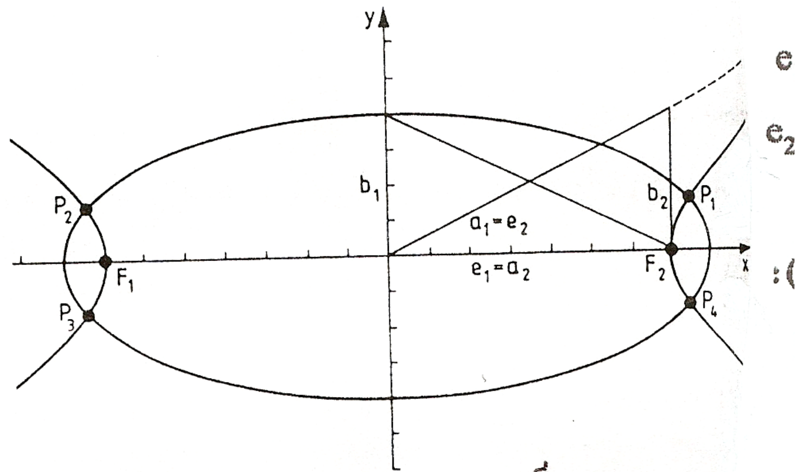


Bild 16.15 ځکره

د هوپربول لپاره نخښی e_2, a_2, b_2

استعمالوو:

باورلري (پرتله ځيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دیَ

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواوردينات د ايلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو ځخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

اود دې سره سم د دواړو کړو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډیری ده، چې واټن يې له يوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او يوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه څيره کی جوته ده چی دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(څيره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نيم پارامتر p بلل کيږي، Sککری ټکی دی،کرښه چی له S او F تيريږي د پارابول محور دی.

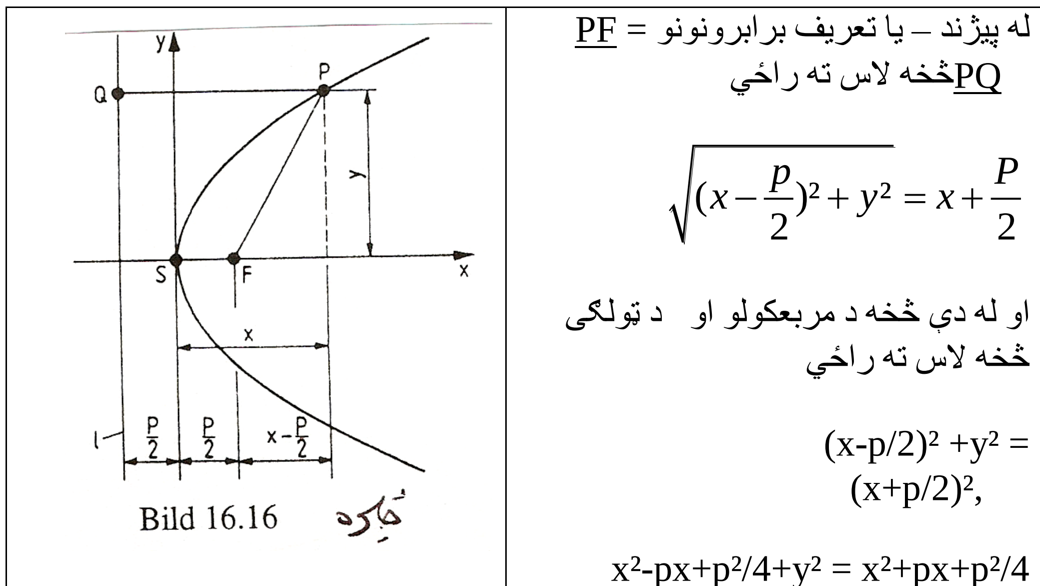


Bild 16.16 څيره

له پيژند – يا تعريف برابرونونو = $\underline{PF}$ $\underline{PQ}$څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز (x > 0)

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکيڼ لور ته واز پارابول دئ.د واريابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0سره، پورته واز پارابول ($y > 0$)
په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دئ.

که ککرټکي S کواوردينات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلي په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د يوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککريبرابرون د ککری ټکی(S(xS,yS سره، چی ښی لور ته وازوي($x>xS$)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککريبرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي ($y> yS$).

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کښ لور او همداسی کوزې يا لاندې لور ته واز پارابولونه دي
د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټوليز (عمومي) جوړښت پيژندل کيږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B \ |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټوليزه (عمومي) بڼه (فورم)

بيلګه ۱۶ . ۲۲ :

د پارابول برابرون دې له ککریټکی ، له نیمپارامتر او وازلورې څخه پیداشي:
الف $S(\ ,0,0\ ),\ P = 6$)کینې، ب $S(2,1)\ ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5),\ P = 4$) لاندې ت $S(4,-2)\ ,P= 2\ /3$) ښی

اوبیونه یا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4\ /3)\ (x-4)$

بیلگه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردینات ، نیمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a\ )\ (x^2 + 4y +20x + 10 = 0,\ b)\ \ y^2 -18x + 12\ y -36 = 0$.

اوبیونه : د پارامترتولیزه بڼه (فورم) دې په ککربیرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمایل شي (څلوری پوره کیدنه یا مربع تکمیلیدنه) . د ککربیرابرون څخه ککریټکي ، نیم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y\ \ S(-10\ ,\ 0)\ ,\ P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6)\ \ \ ,\ P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولگه:

دا له ۱۶ . ۱ نیولی تر ۱۶ . ۵ پورې څیړل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې یا سطحه کی)

-کرښه
-ګردۍ
-ايليپسی چی د کواوردينات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څير انځوريږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضريبونه يا ځله ووني A او B د کږی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ايليپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کينې لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره يو پارابول، چی محور يی د x - محور سره غبرګ دی د $A \neq 0$ ، $B = 0$ يو پارابول ، چی محور يی د y - محور سره غبرګ دی
د $A = B = 0$ لپاره يوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) يو بل ګډوله(يو د بل سره ګډ شوی) څلورۍ توکي رامنځ ته شي، نو دا د کږې يو څلورۍ برابرون يا مربع مساوات ښکاروي (توضيخ کوي) ، د کومو محورونه چی نور د کواورديناتو محوروونو سره غبرګ نه دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کږې انځوريدلی شي ؟
a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبيونه : (يادونه : لکه د نورو ځايونو په څير دلته هم الف د a په ځاي ليکم ، ځکه چی د پښتو لپاره کرښه په لاتين حروفو له ښي لور نه شي پيل کيدی)
الف يا a) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب يا b)که $B=0$ پارابول چی محور يی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B > 0$، نو ايليپسی
ت d)که $A.B < 0$ ، نو هوپربول

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ - د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x-محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ -د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ - د محورونو غوڅې (لنډ: محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لرې وټاکئ.

a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b =3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

۴ - یو دریګوټی دا لاندې ګوټټکی لري $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$. د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ - د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخټوټینه یا -فورم څنګه دي؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ - د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

---

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ $3x - y = 5$, b) $y = (1/2)x + 1$ $y = -2x + 6$, c) $y - x = 7$ $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ $-x/2 + y/3 = 1$, e) $6x - 2y + 10 = 0$ $y = 3x + 6$, f) $y = 4x - 1$ $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅېدو ټکي $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ… $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$ سره د درېګوټي دننه کونجونه څومره لوې دي ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی)

۱۰ – د ولاړپریوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱ – د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وخیږئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لري او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(5+3,-1)$ يې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11),P_2(5,5)$ څخه تيرېږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تيرېږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيرېږي.

۱۵ – کوم پروتڅايونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې يو له بل سره لري:

a) $g : y = 2x + 1$, b) $g : y = x$, c) $g : y = x - 1$,

d) $g : y = 4$, e) $g : y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګرديو منځټکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ايليپسي مساوات وټاکی، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

۲۱ – د لاندې ایلیپسیمساواتوڅخه د نیممحورونو اوسوزونتکو منځتکی او اوړدوالی راپیداکړئ:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړئ، کومې چې

الف) چې منځتکی M (0,0) او لاینې ایکسځنتریځیتی e = 6 لري او تکی P(10.0) څخه تیرې،

ب) له منځتکی M (1,1) او لاینې ایکسځنتریځیتی e = 4 لري او له تکو څخه تیریږي،

پ) د نیممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له تکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه تیریږي!

ت) د نیممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له تکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$ څخه تیریږي!

۲۳ – د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوځتکي پیدا کړئ

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولتکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولتکي P(-4,-2) وټاکئ !

---

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نیممحورونواوږدوالی او اسیمپتوټې راپیدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځټکي او د نیممحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکږو غوڅټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردينات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y$ $52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – یو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ

ټکي P (7,4) تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

---

۳۱ - يو پارابول د ککرکواوردينات $y_s = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيريږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ - کوم پروتځاي اړيکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوښتکی همداسې لمستکی يې ورکړئ!

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیداینتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیك کی مورږ لویی پیژنو چی د رییل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو .نورې لویی لکه زور ، چټکتیا(سرعت)، بیړه (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. مورږ دې لویو ته وکتورونه وایو.
د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نخښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه   a,b,   ښوولي، ښه به یې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډیرو کتابونو کې پنډ **a,b,..**   لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چې د ناټیکپوهنې څخه مو ژغوري٠

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخې ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي۰

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویې ته غشی هم ووابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کې د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخې ټول مساوي اوږده او په یوه لور لورى-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې تړل یی په نظر کې نه دي نیول شوي . سړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښنون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځای وکتورونه(په ځاي تړلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :
دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي   **a** = **b**
که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.



Bild 17.1

ټولې برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چی د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت یې یو یوون دئ یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه رییل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دئ چی د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ځښ یا برعکس که $0 > \lambda$ وي نو د a مخامخ لور یا په ځښ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د رییل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوځیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda; ....Kommutativ$$

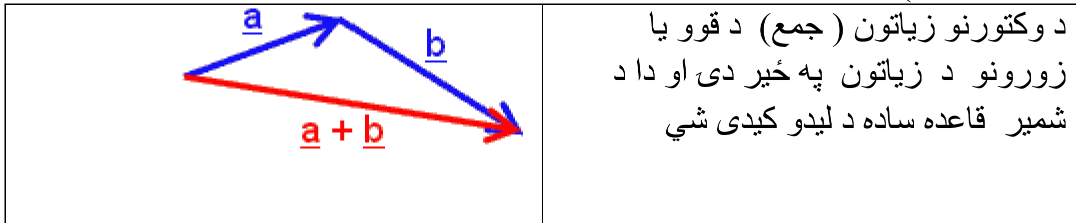
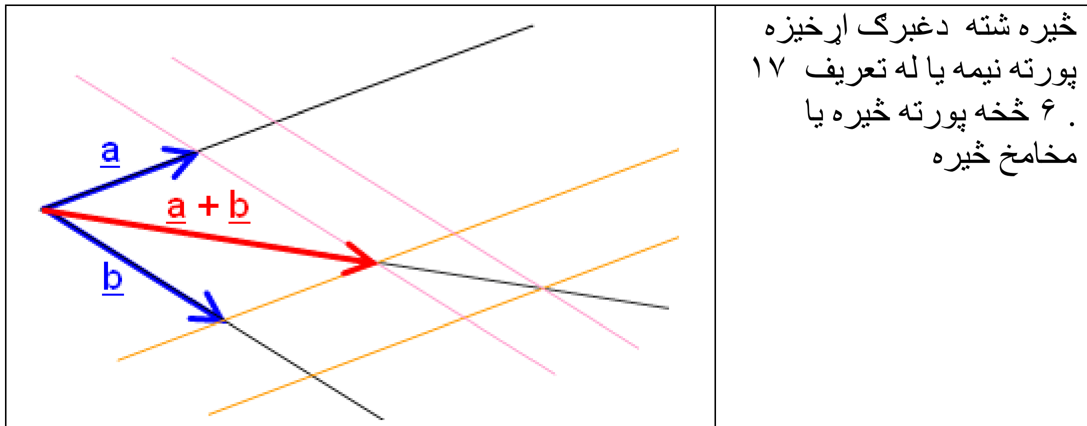
$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a}; ....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چی هر وکتور a د یوه رییل ګڼ)
ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په
څیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . .۶ :

(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a
او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع)   لوریز دوه کونجتړي (قطر) ده.
څیره . ۱۷ ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي	
څیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته څیره یا مخامخ څیره	

جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)

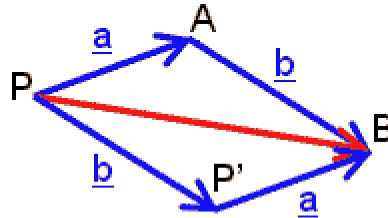
$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندي نظم اړیکي

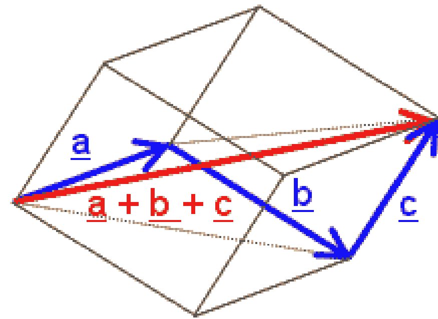
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کې د دري وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3) (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په څیره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

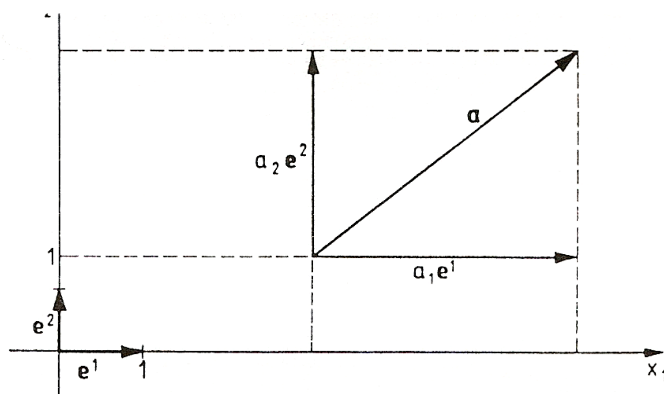


Bild 17.3 څیره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښایي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دئ. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو څرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (څېره ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي
د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ډیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2,a_3),\quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17.4)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \qquad (17,5)$$

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2)$.

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ډیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په ښت وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b)   (ښېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی (پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یاني د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

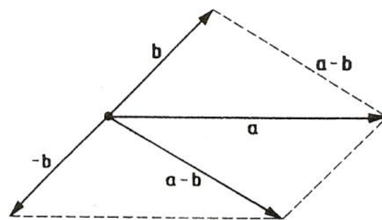


Bild 17.4   ښکاره

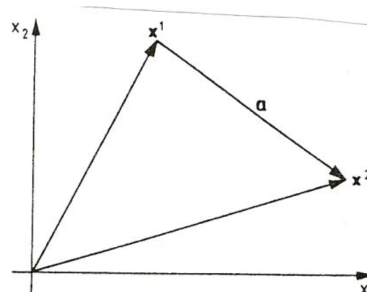


Bild 17.5   ښکاره

بیلګه ۱۷ . ۲:

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دئ :

$$a = x^2 - x1 = (2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

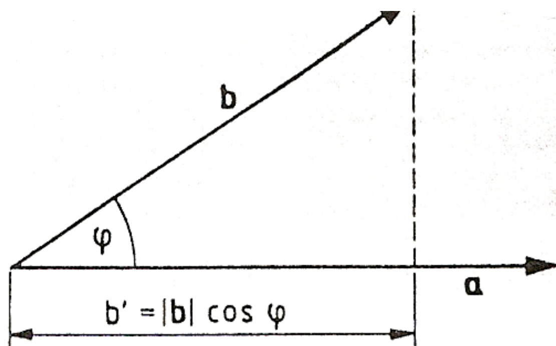
پيژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi; ....(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b'} = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښني ساتلو سره (د کوساین د پيژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (ځیره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلګه :

که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دئ) .

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

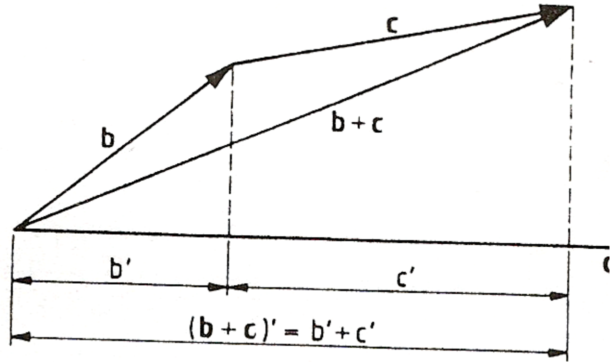
$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

(17 . 9) $a.a=|a|^2$

د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی تړلی لاس ته راځي.
دیستریبوریوقانون په (څیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos \alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)
له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .
همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته څېره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :

د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتېوله صورت نیسي یعني د

$a = (a1 ,a2 ,a3), \quad b = (b1 ,b2 ,b3)$

د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په تواندول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان . دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره ځل شي

a) b1=(3,1,4),b) b²=(3,2,-2), c) b³=(3,3,3)

اوبیونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b² = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b³ = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b³ اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};............................(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};................(17,12)$$

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b^1}) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چی لیکو
a × b = c او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهوارې په مانا دی.(خ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښني لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښایي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښایي (څیره ۱۷ . ۹)

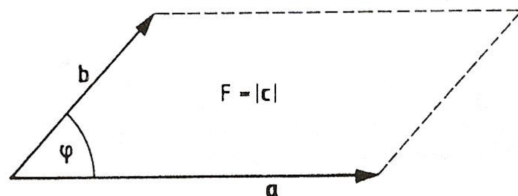


Bild 17.8

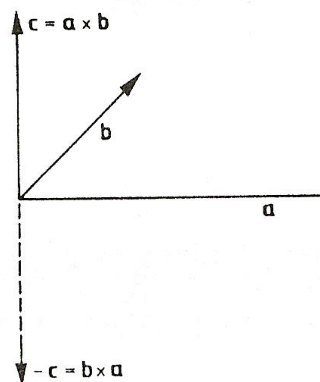


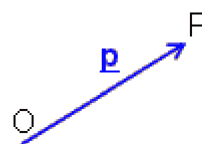
Bild 17.9

دا لاندې ښيرې د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

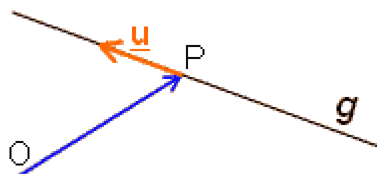
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

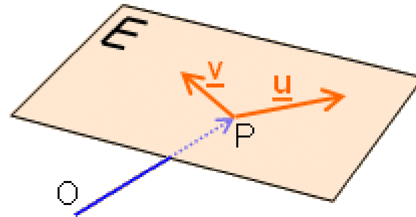


کرښه g



g: $\underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه يا وکتور ځل يواځي د دری اړخيزي هوايا فضا لپاره تعريف دی.

د وکتورځل بيلګه په فزيك کی :

كه F قوه يا زور وي چي په يوه كلك خرخيدونكي بدن (جسم) د Q په ټكي د r په مرووند چی د r سره كونج جوړوي، بريد يا حمله كوي او هغه د P په ټكي څرخوي (ځيره ش.
۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

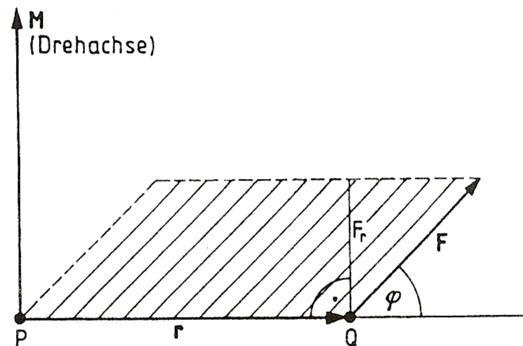


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د ځرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$$F_1 = |F| \sin\phi$$

چی د اړم په مټ (نيغ) ولاړ د قدرت يا قوت زور كپوننت (جوړونكی) دی:

$$M = |r||F|\sin\phi$$

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شمیرقاعدو ښه څرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخی (پیژند .۱۷ ۱۰، ځ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخی (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه څرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3;\ldots\ldots\ldots\ldots(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2;\ldots\ldots\ldots\ldots(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2;\ldots\ldots\ldots\ldots(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په ځیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل a×bد a , b کواوردیناتو په ځیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots(17,18)$$

اوبيونه يا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ څل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري څل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه يه دا لاس ته راوړنه يا نتيجه د ديترمينانت (۱۸ . ۱۷) د شميرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بيلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشميرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبيونه يا حل الف) ب) د دې بيلګې اوبيونه دې ګان لستونکي او مينه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تيرې جملي له مخی پوره روښانه دی۰

وکتوري څل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهميت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخيز ه همداډول د a او b څخه خورشوي يا غزيدلې دريګوډی منځهوارې FD شميرلو لپاره خورا مساعد دئ . باور لري

$$F_P=|a\times b|; F_D=\frac{1}{2}|a\times b|;......................(17,19)$$

بيلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ يا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بيلګه ۱۷ . ۸ :

د دریګوډۍ ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چې کونجټکي یي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :

دریګوډۍ له لاندې وکتورونو څخه غزیږي

a=B-C=(3,-1,-2),

b=A-C=(1,2,-1) او

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دئ

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډۍ ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چې مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دئ

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه یي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یي سکالار ده.

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$[a,b,c]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دئ .(څیره ۱۷ . ۱۱)

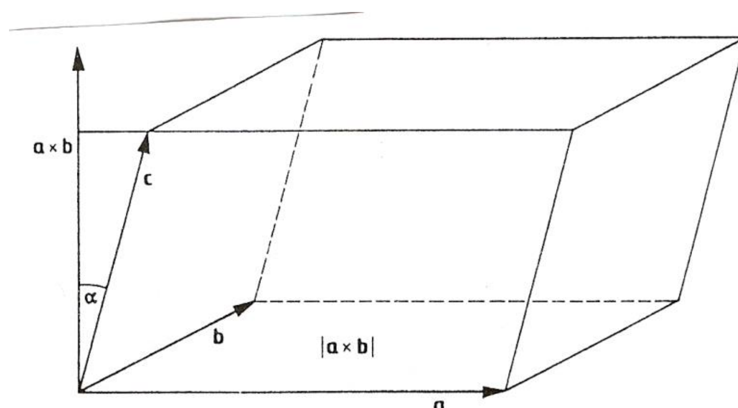


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزیدلي غبرګ اړخیز دئ . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دئ. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښایي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دئ، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

[a,b,c] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]=
=-[c,b,a]=-[b,a,c] (17 . 21

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

جمله ۱۷ . ۱۳:

(17 . 22) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري0=[a,b,c]

د غبرګهواریز یا شپاتځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د a × b سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.

(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)

= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)

دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0

غبرګهواریز - یا شپاتځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه($a=(1,2,3)$, $b=(3,6,1)$, $c=(0,0,1$ کومپلانار دي او شپاتځل یي په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي)
(ځیره. ۱۷ . ۱۲)

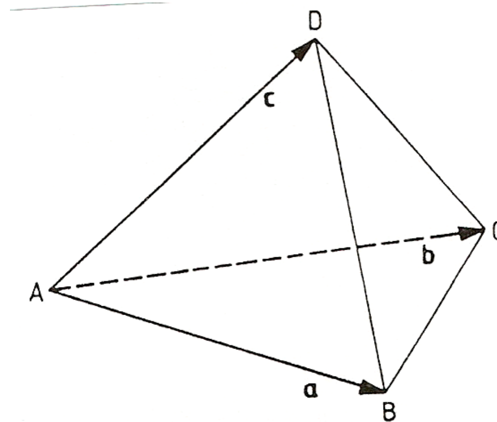


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره

$$A=(1,1,0)\ ,\ B=(2,0,1)$$
$$C=(3,-1,2)\ ,\ D=(1,0,3)$$

یادونه : دا پورته په ختّه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا څېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده

$$a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0)\ ,\ c=D-A=(0,1,2)$$

دا تیترئیدر یو اهرام دئ چی ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جګوالی‌د تیترائید جګوالی د شپاټ جګوالي سره مساوي دئ او د دریګوډیهواره یی د شپاټ نیم د وکتورونو a , b , c کمیز یا منفي دئ

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

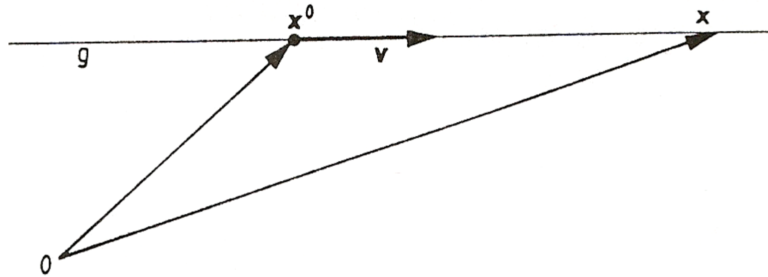
د کچګڼ لپاره مطلقه ارزښت نيول کيږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننيزه (تحليلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحليلي هندسی پرابلمونه او بيا په ځانګړي ډول تحليلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپير(څنګه کيږي۰

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوريزه انځورونه

په فضا يا هوا کي د يوې کرښی ځای د يوه ټکي او لور له لاری يواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردينات سيستم د O څخه دا ټکی ښايي)، لور يي په وکتور V (څيرې۱۷ . ۱۳



څيره ۱۷ . ۱۳

که λ يو پارامتر وي چی د رييلګڼونو ډيری کی ځغلي، نو د کرښی g يو په زړه پور ټکی x د وکتور زياتون يا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کيږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;......................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ريل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي يا د ټکو ترمنځ

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره يواځني يوه $\lambda \in R$ شته يا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v;.............(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو $x0,x^1$ ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوريی دی $v=x^1-x^0$ او په دې ډول يی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0);.........................(17,26)$$

بيلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندي ټکو($x^1=(1,3,2), x0=(1,2,3$ ورکړ شوې کرښه د $v=x^1-x^0 = (0,1,-1)$
له امله په لاندې توګه ليکل کيږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه يا نتيجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: $x,x0$ او v وکتورونه دي، هر يو د دوه کومپوننتو سره.

بيلګه ۱۷ . ۱۳ :

په يوې هوارې کي د يوې کرښي د مساواتو فورم:
$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چی پارامتر λ له منځه يوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د $x1$ په ځاي x او د $x2$ په ځاي y وليکو نو لاس ته راځي$y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چی معلومه کړو چی ايا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو بايد وڅيړو چي کواوردينات يی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ايا دده لپاره يو د λ - ارزښت موجود دی .

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

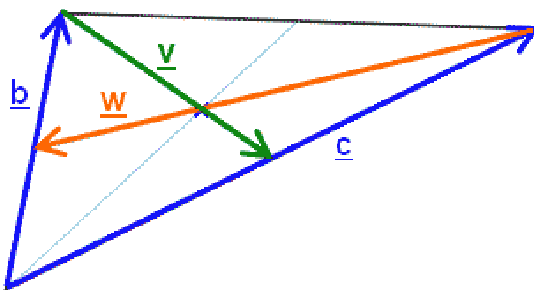
لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له
جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي)
پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$
دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پسx^2 په کرښه g نه دی
پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوڅټکی xS ، موجود وي باید
د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی
پارامتره$\lambda \wedge \mu$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو
پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل
پرتی دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو
غوڅټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

حل یا اوبیونه : غوڅټکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخی او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوڅټکي کواوردینات سیستم د کرښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شيیا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .

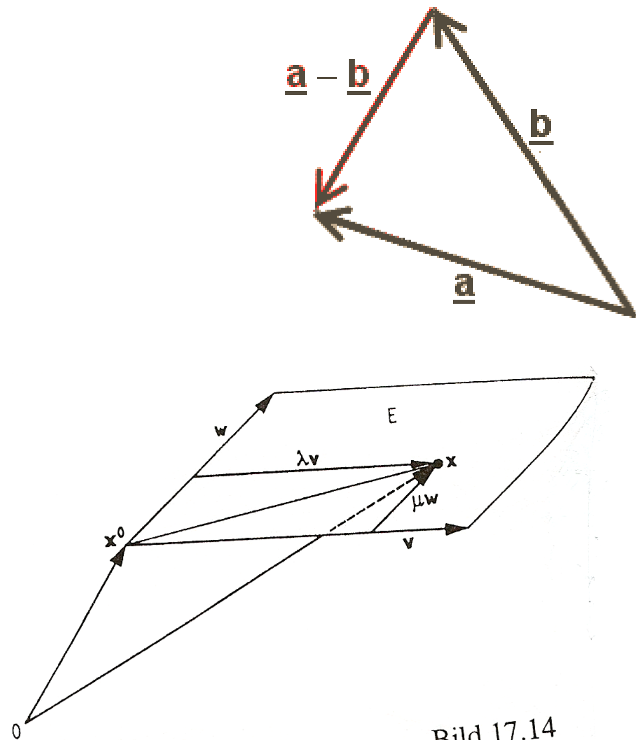


Bild 17.14

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چی یو له بل خپلواك د ریيل ګنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي$(17,27)$ ....;$x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty$.

د هوارې E مساوات چی دx0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه اربښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښایي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; ....(17,28)$$

که چیرې هواره په درې ټکو $x0 , x^1 , x^2$
چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0 , w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); ....(17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:
په درې ټکو($x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11) ,w =x^2-x0=(2,-6,-2)$له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1, 2, 5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور) Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟
څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

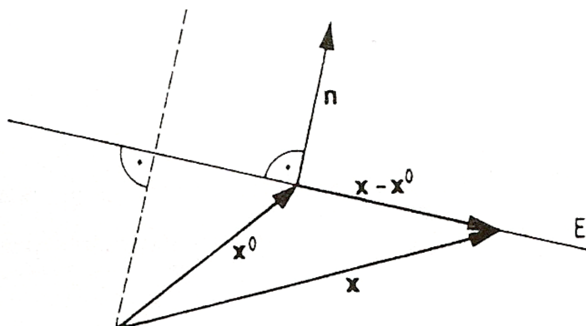


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره (څ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چې باوري کیږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چې ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1 = 1 + \mu, x_2 = -2 + \lambda - \mu, x_3 = 4 - \lambda + 2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسې دي

$$x_2 = -2+\lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1+\lambda \wedge$$
$$x_3 = 4-\lambda+2x_1-2 \Leftrightarrow -x_1+x_3 = 2-\lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1+x_2+x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چې څرګنده کړو چې ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چې برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چې د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :
ایا ټکی(x¹=(2,-2,5 په هواره $E: x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟
اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2=1+0\lambda+\mu, -2=-2+\lambda-\mu, 5=4-\lambda+2\mu$
څخه لاس ته راځي $\lambda=1 \wedge \mu=1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چې x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x¹ کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځای په ځای شي ، چې معلوم کړو چې x¹ په هواره E پروت دی : - 2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښې $g: x=x^0+\lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم په E پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0+\lambda v$ ځای په ځای کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λ لپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

بیلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x = (1,0,1) + \lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a).....x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b)...2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c)...2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

اوبیونه : دا چی لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3= (1-\lambda) + 2\lambda+ 3 (1+\lambda) =4\lambda+4=-4, \lambda= -2$

$x_S = (1+2,-2 ,1-2)=(3,-2, -1)$

b) $2x_1+ x_2 + x_3 = 2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda +(1+\lambda)= 0.\lambda+3 = 4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x = c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x = c2$ غوځکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ – سرې یوه واریابله یا اووښتونې په خوښه وټاکي $x_i = \lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j \neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښیزو افادو یا ویینو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: ($x = x_0 + \lambda (x^1 - x_0)$.

بیلګه ۱۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پریکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1 : x_1 - x_2 + x_3 = 3, \qquad E_2 : 2x_1 - x_2 -3x_3 = 0$

حل ۱): $x_1 = \lambda$ په خوښه

$E_1 : -x_2 + x_3 = 3 - \lambda , E_2 : -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :-$-x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4 -$

نو لاس ته راځي $x_1 = \quad , x_2 = (5/4)\lambda - 9/4, x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0, -9/4 \ , + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$ د لاندې حل سره $x_1 = -3$, $x_2 = -6$,

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې ټکی دی,که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کرښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کرښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کرښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کرښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $a = (1,0,-2)$, $b = (-3,-5,0)$, $c = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.

جوړ کړی :

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وښیئ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتې لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a = (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a . b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ– یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

---

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولاينې دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکې يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېلګه : څلور دا ړخي [د دا هوار تشکل دله])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکې ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^1 = (2,-3,4)$, $x^o = (o,1,2)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره
له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښیول شي چی ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,
b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,
b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,
c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \; -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوځکرښه دې راپیدا شي !

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟«
دې ته طبعآ د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کي نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې څېرنې سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څېرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګي لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

له دې ځایه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د څیړنی کیږي چې هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کیږي چې وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه
۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)
۳ - د شمیرپوهنیزو پېژندو یا تعریفونو ټیکوالی،
۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،
۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،
۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو
۷ - بالاخره د پرلپسی لړۍ چی په لنډه توګه ىی لړۍ بولو څیړنه .
دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته.
داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعې یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دی.
کیدی شي چی دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

دې ټولو حالتونو کې همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنې ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسې لاس ته راځي چې لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسې ورپسې تر n غړي پورې چې دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنې لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنې3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچې 396:4 = 99 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روڼنې ژوند کې هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کې د بریالیو ترتیب او داسې نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چې دا مسئلې د شمیرپوهنې له لارې وڅیړو او وګورو چې په شمیرپوهنه کې ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځې ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا - ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چې دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو ریبل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب ریبل ګڼ وښایي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچې دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چې د فنکشن پیژندډېری (تعریفدیری یا تعریفسټ) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چې n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد 1, 2,3 ,...k ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;\ldots a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;\ldots; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

| a_n D=N;W={چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};\ldots a_{10} = \frac{1}{10};\ldots \{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3 - \{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,\ldots a_{17} = -1;\ldots a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},\ldots a_k = 3+\frac{1}{k},\ldots, a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یواځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3,.....$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چې لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسي $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چې د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا....a0,a1,a2

ګورو چې د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چې د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{an\}:1,4,9,16,25...=> = \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چې(<=)

$$\{an\}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>$$

یا په دې مانا چې{an}={(n+1)/n}

$$\{an\}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>$$

په دې مانا چې $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

$$\{an\}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>$$

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$

$2.1 + 1 = 3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دئ:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^3 - 1 = 8 - 1$

$2.3 + 1 = 7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64 - 1 = 2^6 - 1 = 63$

$2.31 + 1 = 63$

اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$2.63 + 1 = 127$

ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ

$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ $2.127 - 1 = 255$ ....)

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

$a1 , a2 , a3 , a4 , a5,$

سره ښایو.

اوس زمونږ په دې بیلګه کی داسی لرو: $a1=1, a2=3, a3=7, a4=15, a5=31$

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللاري کیدی شي چی په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4 - 1 = 2^{2-1} = 3$	$= 2.1+1=3 a_2$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2.3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = \quad 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2.31 + 1 = 63$

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

م- غړی k $(k \in N \wedge k \geq 2)$ غړی م-k $(k \in N)$
په کوم کی چی ………………… په کوم کی چی
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي …… 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2^k - 1$ $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په ګټه کی دی . ولی؟
دواره کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ځت ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$
دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.
د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:
د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:
یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.
حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :
یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبنونه:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$
$$a_4 = a_3 \,.\, a_2 = 2.2=4$$
$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

پوښتنی:

د هرې لاندنی پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشميرئ پرلپسې رکورزيو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$ b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$ d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$ f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$ h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بيلګه :

يوه پرلپسی د $a_k = k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشميرئ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بيلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشميرئ

اوبی يا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

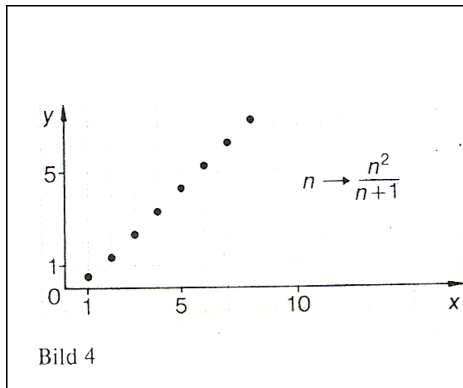
<table>
<tr>
<td>

Bild 4</td>
<td>په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د ګراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړې د نمرې ak سره و کښل شي</td>
</tr>
</table>

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو ګراف په کارتیزې کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.
له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1
(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دئ او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د ګرابو لوستونکو پام وي)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\
&= 2.2^k - 1 \\
&= 2^k + 2^k - 1 \\
&= 2^k + (2^2 - 1) \\
&= 2^k + a_k \\
&> a_k
\end{aligned}
$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره ak+1> ak

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره ak+1 $\geq$ ak

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

ak = 10 - 4k

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

ak+1 < ak د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

ak+1 = 10 - 4(k+1)

=10 - 4k – 4

=(10-4k)-4

= ak – 4

< ak

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوتونټیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:

د ټولو $k \in N$ لپاره ak < ak+1

که په یوه پرلپسی کې باور ولري(په پورته کې او همداسې که ورپسې داسې څه راشي کا د ان توکی دئ)

د ټولو $k \in N$ لپاره a1 ≤ ak+1

نو دلته د یو غږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي

ب) کلکه مونوتون ټیټېدونکي یا –لویدونګې وي

پ) مونوتون جګیږي

ت) مونوتون لویږي؟

ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چې د توکي (aK=(k+1)/(k+2 سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1}-a_k=\frac{(k+1)+1}{(k+1)+2}-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+2}{k+3}-\frac{k+1}{k+2}$$

$$=\frac{(k+2)^2-(k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)}=\frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{(k+3)(k+2)}>0 \quad k \in N^*$$

له ak+1-ak>0 همداسی(<=) (ak+1)>ak

د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیړنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالند: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰ ، ۱۰۰) توکي وشمیری.

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmetic پرلپسی ده چې لومړی توکی یې a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یې d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;10 ; 1- , 12- , 23-, 34- اریتمیتیکي پرله پسی ده چې لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته وونې d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$
$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او د y - محورغوڅی a1-d=1

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ورکړ شوې.
غوښتونکي a_{20} ده.
داسی لرو: $a_1=2,d=17,n=20$
نو $a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_1 = -o,5$ او $a_{10} = -44,5$
غوښتونکي d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow (a_n-a_1)/(n-1)=d \Rightarrow$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دۍ کارورکوونکی ته وایي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور، یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړۍ ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیځیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$ د ټولو $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n . q$$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹—— n anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښایي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - $a1=3$, $q=2$,$n=15$ => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - $a1=19,q=1,01,n=100$;

$= 50,8826363919.1,o1^{99}$ a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د $1 < q$ لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \dfrac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\dfrac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \dfrac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\dfrac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \dfrac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \dfrac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \dfrac{k-2}{k}$ b) $a_k = \dfrac{k+4}{k}$ c) $a_k = \dfrac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \dfrac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\dfrac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړئ

د هغه کارپلټونکی زدکړې وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چې د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دویمې ورځي 0,1 د دریمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.
په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:
د k - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟
دا مو یوې ځمککچیزې لړئ ته لاربښودوي د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره.
د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼ یا د اجورې معیار دی.
دا په دې مانا چی زدکړی دk - می ورځي لپاره $0,05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

که غواړو چی وښایو چی زدکړی په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0,05\ .2^0 = 0,05$$
$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$
$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$
$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$
$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$
$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:
پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....
دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
.
$$s_{20}=(a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
.
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
.
.

نو یوه پرلپسی...,S1,S2,s3 لاس ته راځي٠

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړۍ (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړۍ بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړی توکي Snورکړئ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0.2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړئ پرلپسي (لنډ: لړئ) بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړئ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړئ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړئ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$$

$$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$$

$$s_{100} = 399+ 395+\ldots + 11 + 7 + 3$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) + \ldots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + ..$	$2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$
$+402 + 402$	
$2s_{100} = 100.402$	$2s_n = n.(a_1+a_n)$
$s_{100} = 50.402$	
$s_{100} = 20100$	$s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شميرني سره سم د اريتميتيکي لړۍ زياتون دی: $s_n = \frac{n(a_1 + a_2}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتيا لپاره کموتاتيو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بيلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دويم- يو ميراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ويشل کيږي چی هر يو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زياتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسيږي. معلوم کړئ چی ميراث څومره دئ او هر يو ورور څومره ميراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پيسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اريتميتيکي لړۍ زياتون پيداکيږي، همداسی د هندسي لړۍ زياتون هم پيداکيدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بيلګه کی ځانګړی يا ځانيزشي

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړی sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړی لړو توکو ته لړیږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمککچیزې یا هندسي لړېپرلپسې (لنډ: لړی):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
$$.$$
$$.$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
$$.$$
$$.$$

جمله : (اکسپلیځیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د $ak = a1 +(k- 1).d$ توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

$Sn = a1+a2q+a3q^2+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);$

$q|=0;Sn=n.a1 \qquad q = 1$

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$
$$s_n \cdot q = \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$
$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n (1-q) = a_1 (1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته يو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $an = 3.2n-1$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړۍ غړي لړو غړو ته رالبږيږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n \qquad +$$

$$s_{15} . 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304 \qquad s_n.q = a_1.q + a_2.q + .. a_{n-1}.q + a_n.q \qquad -$$

$$s_{15} - s_{15} .2 = 3 - 98304 \qquad s_n - s_n.q = a_1 - a_n.q$$

$$s_{15}(1-2) = 3-98304 \qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n.q$$

$$s_{15} = (3-98304) /(-1) \qquad s_n = (a_1-a_n.q) /(1-q) = (a_1-a_1.q^n) / (1-q)$$

$$s_{15} = 98401 \qquad s_n = a^1 . (1-q^n) / (1-q)$$

له کمون يا کمښت وروسته د لړۍ په کښه لور ټيك(يواځی) پورته ليکی لومړی
توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتيږي، نور ټول توکی يوبل سره لرې کوي، د
بيلګي په توګه $a2-a1.q=0$ او يا $an-an-1.q=0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت
که به مو پرلپسی
a1,0 , 0 , 0 , 0.......
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a1, a1, a1 ,a1سره سر او کار وي

بيلګي:

$$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی s_7

$$s_7 = 7 . ((-3)^7 -1) / -3 -1 = -15316/ -4 = 3829$$

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$
$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

ak = 15 + (k - 1).4

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$
$$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$
$$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

د ak = a1+(k-1).d

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$
$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په يوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

مونږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چې اخرنی توکي يی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پایلړۍ بلل کیږي. داسي فکر هم کيدی شي چي د لړۍ اخرني غړي موجود نه وي، يعني لړۍ دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کيږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرگنده ده، چي داسی لړۍ اريتميتيکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او يا د پادیرو غړو زياتون، په اريتميتيي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چی دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړیو کی هم په يوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پيل غړی د|q| سره ځل له امله تل جگيږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بیلگي:

۱ - اريتميتيکي لړۍ 2+3+4+5+..... يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لويږي ياجگيږي۰

۲ – ځمککچيزه يا هندسي لړۍ 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي a1 = 2 او د ویش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. يا جگيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوګڼ زياتون sn او اخرنی توکی an شميريدونکی دی.

----

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ

1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لوییږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دۍ.

پیلبیلګه :

یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور. دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.

د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول $s_n = 1000(1-0,5^5)/(1-0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1-0,5^5)/(1-0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5) = 2000.(1-(1/2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي. دې مات (1/2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ
1000+500+250+125+65,50+32,75+......

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي.

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبنونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

یاپوله لرونكي(بلل لكيږي او په دوهم حالت كی پرلپسی (divergent ليمټ يا پوله نه لرونكی) بلل كيږي.

بيلګه :
د ... مخ په اول او په دريمې بيلګو كی راوړل شوې پرلپسی ديورګنت يا پوله نه لرونكی ، په ۲ –مه بيلګه كی پرلپسی كونورګنت يا پوله لرونكی ده او د صفر لور ته هڅه كوي يا صفر ته كونورګنت ده يعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بيلګه كی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه كوی، يعني پوله يی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د ځګيدو سره يوه ټاكلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې كيدی شي.د
دې پرلپسی د په خوښه لويو غړو او د دې ګڼ كمون ترمنځ بالاخره دومره كوچنی كيږي، چی په جبشميرني باندې هم نه شي شميرل كيدی .
موږ د پرلپسيو دا ډول ځاننيونی، بی له جب شميرنی يا جبشميري، په لاندې بيلګو كی څيړو.
د پرلپسيو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

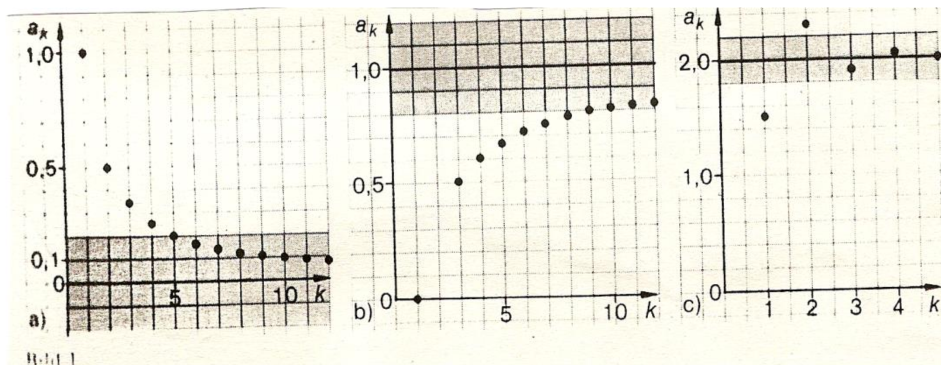
د k د ځګيدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې كوي

$g = 0$ | $, g = 1$ | $g = 2$

د ګراف ټكي يی تل د ځګيدونكی غړی نمرې k سره د
دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته
د y = 2 سره | د y=1 سره او په ريښتونی
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونكي
له پورته راتلونكي
راتلونكی
كه په كرښه يو دواړو لورو ته پټی وكښل شي

د $y = 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جگيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلگي په توگه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0,0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0,0001$$
$$\frac{1}{k} < 0,0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0,0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0,0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0,0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0,0001$$
$$\frac{2}{0,0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0,0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0,0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0,0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0,0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0,0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0,0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0,3010}$$
$$k > 13,29$$

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 13$	$k > 19999$	$k > 10000$

سره کمون $|a_k - g|$ له 0,0001 کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د يوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي سور يي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 2$	$y = 1$	$y = 0$

$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$

سره پروت وي .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی ريیل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لاربنودوي.

$\lvert a_k - 0\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2\rvert < \varepsilon$
$\left\lvert\frac{1}{k} - 0\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert\frac{k-1}{k+1} - 1\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert\frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert\frac{-2}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\Vert : \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$	$k > 2/\varepsilon - 1$	$k > 1/\varepsilon$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خويونو سره کونورګنت بلل کيږي او ګڼ g یی پوله.

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکیدل(بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږی، کله چی د هغی غړي د ځګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د ځګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر څیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |q| < 1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړی ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله تیك هلته لري، کله چی|q|<1 s = a1 / (1-q)

$n = n_0(\varepsilon)$;...(18.7)

وي.

جمله :

هره پرلپسی د $a_k = \frac{b}{k^n}(b \in R; n,k \in N)$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده٠

دلته غواړو چی دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ 1/n}={an} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګنونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0 (\varepsilon). \qquad (18.1)$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0 (\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} . \qquad (18.2)$$

د
100 / 1 =
لپاره . 100 = n0 نو | 100 / 1 > | an د ټولو 100 < n لپاره، یعني د n = 101, n
لپاره. د =102 , n = 103........ 1 = 1000000 / 1 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | 1000000 /1 > | an د ټول 1000000 < n لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
/n{ 1 {
کنورګنت ده. هغه د پولې 0 = a لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$
او یا په ساده ډول
$$\frac{1}{n}\to 0 \qquad (18.3)$$
(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)
د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څېړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کيږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کيږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږيږي بلکې دپرلپسی ددوه ډيرۍ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه ديورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی ديورګنس)ده ٠

پرلپسی {an}={n2} هم ديورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګيږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی ديورګنت څخه غږيږي.
$$\lim_{n\to 0} n^2=+\infty \vee n^2\to+\infty;..........................(18.4)$$
په پورته کې \/ د یا لپاره ځای په ځای ده
له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپيژندل شي:

پيژند ۱۸ . ۲ :
یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري
$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow a_n\to a;.............................(18.5)$$
که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon>0$
<0
لپاره یو $n_0=n_0(\varepsilon)$
داسی موجود وي چی باوري وي
$$|a_n-a|<\varepsilon;............................(18.6)$$
د ټولو $n=n_0(\varepsilon);..(18.7)$

وایو چی پرلپسی } an { کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی } an { د پولی a په لور کونورګنت کيږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو ديورګنت بللکيږي(یا ديورګنت کيږي) .

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو
ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \to +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \to -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{n/n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعنې $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دي

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\epsilon>0$ ته یو $n_0(\epsilon)=(1/\epsilon)-1$
داسی موجود دی چې $|a_n-1|<\epsilon$ د ټولو $n>n_0(\epsilon)=(1/\epsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا
دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ
Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چې کونورګنځ
اټکل کیدی شي چې دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\epsilon$$

د $n+1 > n \Longleftrightarrow n > (1/\epsilon) - 1 = n_0(\epsilon)$ لپاره .

د $\epsilon = 1/100$ لپاره لرو $n_0(\epsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\epsilon>0$ ته یو $n_0(\epsilon)=(1/\epsilon)-1$
داسی موجود دی چې $|a_n-1|<\epsilon$ د ټولو $n>n_0(\epsilon)=(1/\epsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر 0<

$\epsilon>0$ ته یو $n_0(\epsilon)=(1/\epsilon)-1$

$|a_n-1|<\epsilon$ ،

داسی شته دی چې

د ټولو $n>n_0(\epsilon)=(1/\epsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . . ۲ پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چې

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ٠

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کې سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مې د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ« شي٠

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګې په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګې e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله يا مقايس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیړندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګنونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \qquad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \qquad (18.14)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad (18.15)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \qquad (18.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b,\ a_n > 0, a > 0, \qquad (18.17)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \qquad (18.18)$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنخ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، حٔل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.

په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر

< 0

ته یو

$(n2$ (او یو $(n1$)

داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دټولو $n > n_1(\varepsilon),$ لپاره ،

$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon),$ لپاره‌پس معتبر دي

$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$

اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$

د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ډ ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$ لپاره

په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.

د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی {an} او { bn} څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty,$ او $b_n \to \infty,$ وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty,$

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty,$ نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې .bzw د همداسې‌په معنا دی.

$a_n \to 0,\ b_n \to 0$ bzw. $a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \ \text{bzw.}\ \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسې د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسې $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to \infty^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to 1^\infty. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسې پرلپسی چې د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لابنودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړی څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چې داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n \,.\, b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.
که an —> a او bn —> oe وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \qquad (18.27)$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty,\ a > 0, \qquad (18.28)$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty,\ a < 0, \qquad (18.29)$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \qquad (18.30)$$
$$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.31)$$
$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.32)$$
$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty,\ a > 0. \qquad (18.33)$$

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0,\ a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty,\ a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کې لاندې افادې تاکلی افادې دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کې ونیول شي) :

$$\begin{aligned}
&\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty, \\
&\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty, \\
&\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \\
&0^\infty = 0,\ 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0), \\
&\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.
\end{aligned} \tag{18.41}$$

په لاندې بیلګه کې به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومې چې د تاکلو افادې په لور لاربښودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسې پرلپسو بدلیږي چې څرګنده – یا ټاکلې افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چې د هغي کونورګنتځاننیونې معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غږو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سرې ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چې دا پولی ځاننیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \ a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a,\ \ \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

$$(1+\frac{1}{n^2})^n = (1+\frac{1}{n^2})^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = ((1+\frac{1}{n^2})^{n^2})^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1,$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n^2} = (1+\frac{1}{n})^{n \cdot n} = ((1+\frac{1}{n})^n)^n \to e^\infty = \infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$	(18.44)

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \quad (18.45)$$

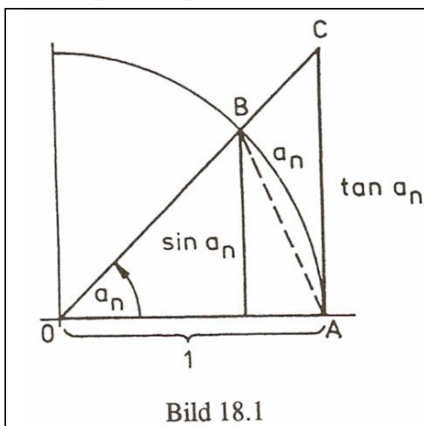


Bild 18.1

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او له‌دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یوائې د $an > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونکردی یا واحد داېرې د کونج بلواک ځخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ . ۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$, ځخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OACد منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

ځخه کوچنی دۍ. له دې امله باور لري
$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$
.

اوښونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد دایرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او وروسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1,\ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n},\ \text{also}\ \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$،

چې د ناټاکلي افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه ګڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وېینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2},\qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty,\quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بیلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کیدی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلې افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرئ (که شتون ولري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

---

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$ d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$ b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$ d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$ f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$ h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$ j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$ l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$ d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$ f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$ h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$ b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$ d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$ f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسي) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروايي داسې وڅیړو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - (x– محور (abscissa)) باندې پرلبپسي یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنزدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسي یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کیڼ لورته او همداډول له کیڼ و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.
۲ – د تابع ګراف وکاږی
۳ - $f(2)$ پیداکړی او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي
۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(ځیره) کې روښانه کړی.

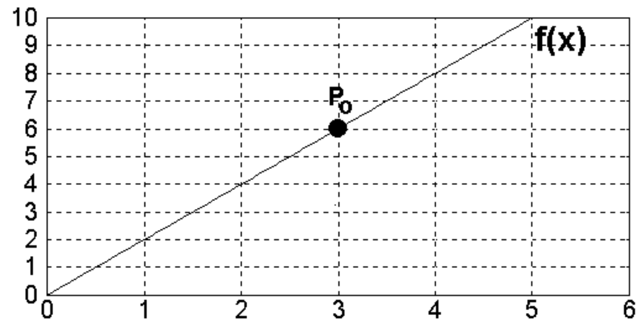
بیلګه ۱ :
یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.
۱) د تابع جدول وکاږی
۲) د تابع کراف یا ځیره , وکاږی

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په ځېره کې روښانه کړی.
اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:
۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

۲) د تابع ښیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د دړې ارزښتونو څخه چې له ښیٔ او کیڼې لور و ۳ ته ورنږدې کیکیږي و ګورو، چې په دې دړې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښیږو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کیڼ لور وکښته ۲ ته نږدې کیږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نږدې کیږو. بل جدول پروت کاږو

له ښي و کیڼ لور ته له کیڼ و ښي لورته

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

$\longrightarrow 6 \longleftarrow$

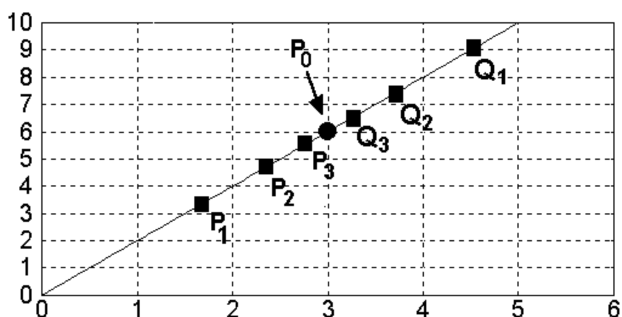
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کيږي. که "x" و "3" ته ورنزدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنزدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... $P_1, P_2, P_3,$ په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نزدې کيږي. او همداسې ټکي ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نزودې کيږي.

کتل کيږي: هرځومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نزدې کيږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نزدې کيږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نزدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نزدې کيږي.

وايو: ۶ د فنکشن f(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکدول ليکښه(په پرله پسې يا ترادف کې) پيژندلی:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

يادونه: د تابع پوله يا حد په هغه ځای کې چې تابع تعريف نه وي هم کيدی شي شته وي:

په پورته کې مو د يوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونيو . دلته تابع په x =3 کې پيژند يا تعريف درلود.

اړيين نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر يف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره يوائې د x=3 په نزدې کې تشريح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو يا توابعو کې ،،پوله يا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی ـ لکه د مخه ـ مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بيلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوی

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونيسی‌که "x" و "1" ته نزدې شي يا همداسې که $x \to 1$.

له دواړو ياني له ګراف او جدول څخه مونږ ليکو چې f(x) د ريل عدد“1 “ په لور هڅيږي. نو

خيره دې ګران
لوستونکي وباسي

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :

تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسي یې لیکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند ربنتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعني چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نزدې شي

---

4) د(x)f ارزښت پیدا کړی که "x" له کيڼ لور و1- ته نږدې شي

5) وښاياست چې تابع (f(x خو پوله ارزښتونه لري .

يادونه: که يوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعريف ده (يا تشيا؟**functional gap**) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "| |" داسي ليکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع گراف انځوروو :

که ځیره ونه کښل شوه ساده ده

3) د (f(x ارزښت که x له ښي لور و1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د(x)f پوله ارزښت که "x" له کيڼ لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

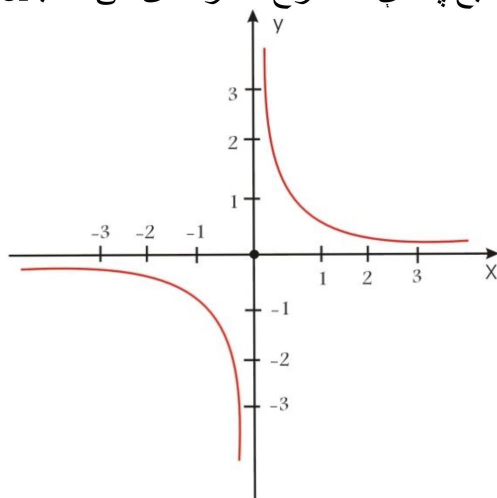
$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

5) گورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (1-) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري يعني$\lim_{x\to\pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله (f(x پوله نه لري

بيلگه ۳ : تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په $x=0$ ځای کي تابع ارزښت نه لري یاني په کي $x=0$ تعریف نه ده. دا په صفرځای کې قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



و$x=0$ ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،

او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع $f(x)$ په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قْضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

د حدونو خويونه يا خواص : " **Properties of Limits** "

فعاليت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کتمتې توابعو Identity function حدونه وشميرئ

د ليميټ خويونو څخه کار واخلئ

د پولينوم تابعو حد (پوله) پيدا کړئ

پوهيږو : په رياضياتو (شميرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زياتون، ضرب(ځل) وېش او زنځيرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g (x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره يوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, يا $L(x) = cx$, يا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2,$ څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعاليت :

ايا د يوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پيدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع وليکئ.

يادونه: د پورته کارونې په څير همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتيا دئ

د يوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

په همدې ډول کټمټ يا ايډنټيک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقيقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کيږي. دا ،، ټيک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نزدې شي

فعاليتونه:

1)که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim_{x\to1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$h(x) = x + 2$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي
4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په ياد ولرئ يا وليکئ

$h(x) = \lim_{x\to1}$	$x + 2 = 3 \lim_{x\to1}$

او $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيداکړی

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅيړی، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکی، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړی $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړی (a $f(x) + h(x)$ (b $\lim_{x\to 2}(f(x) + h(x))$ (c $\lim_{x\to 2} h(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږی او پيدا کړی

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$, b) $\lim_{x\to -1} g(x)$; c) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

یادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا یل شته چې پولې شمیرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M ریيل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x)))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x))) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}; (M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نزدې کیږي.)

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \leq 0$
	$x - 1$	$o < x < 2$
	$2x + 1$	$x \geq 2$

پیدا کړی

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

حل :

a) $\lim\limits_{x \to -2} (f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x); \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (2x+1) = 2 \times 4 + 1 = 9$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$;

له ښي لور $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 2 \times 2 + 1 = 5$

له کیڼ لور $\lim\limits_{x \to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

له دې امله پوله (حد) نه شته

$$e)\ \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(x-1) = 0$$

بیلګه: $\lim_{x\to2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}(2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to2} 2x^2 - \lim_{x\to2} 3x + \lim_{x\to2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to2} x^2 - 3\lim_{x\to2} x + \lim_{x\to2} 5$$

2 + 5 = 7× 4 - 3 ×= 2

فعالیت : که $\lim_{x\to-2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to-2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$ وي دې

$\lim_{x\to3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- یا کسري فنکشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولینومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1} x^{m-1} + ... + b_0} \; ; b_0 \neq 0$$

په پورته پولینوم ویش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولینوموېش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولینوم ویش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي یا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پیداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ویاندو،، توابعو پولې پیداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو یا متودونو څخه کار اخلو.

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېړو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2} = \frac{(1)^2+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

که $x = 1$ ځاي په ځای کړو(Substitue)

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{1^2+1-2}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \ddagger 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډېږي: $\lim_{x\to2}(x-4)$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی او برعکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

$$= \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پيدا کړی $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to3} -1(\sqrt{x+1}+2)\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1} + 2) = -4$$

بیلګه ۷ : پيداکړی $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

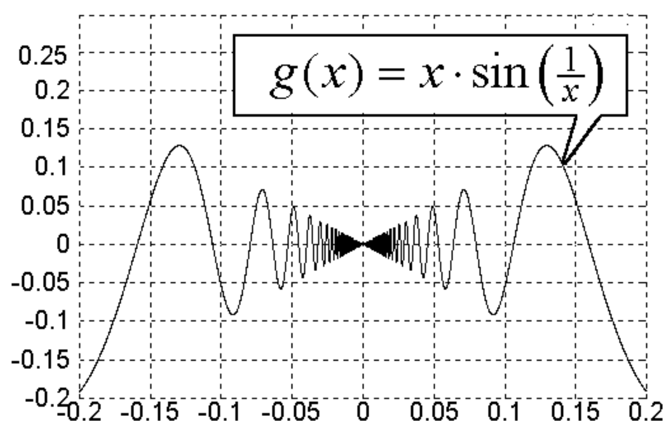
$$= \lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

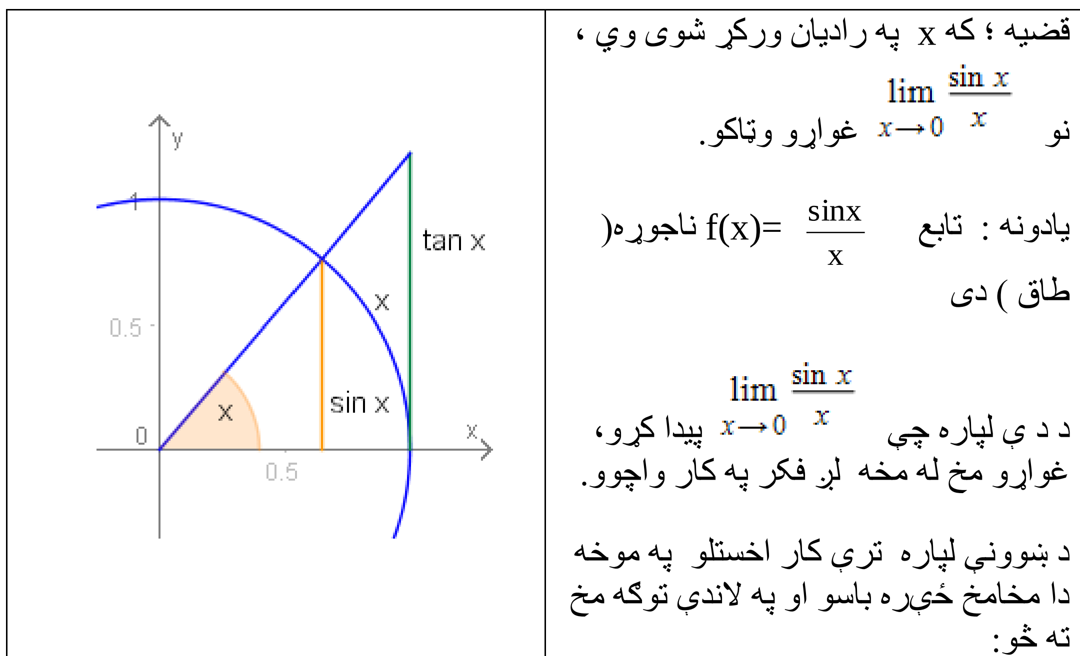
$$= \lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:



قضيه ؛ كه x په راديان وركړ شوى وي ،

نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وټاكو.

يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه (طاق) دى

د د ي لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا كړو، غواړو مخ له مخه لږ فكر په كار واچوو.

د ښووني لپاره ترې كار اخستلو په موخه دا مخامخ ځيړه باسو او په لاندي توګه مخ ته ځو:

په يوه انتروال $x\epsilon[0, \frac{\pi}{2}[$ كې د رسم له حالته سملاسي لاندي نا برابرون يا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دي سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x>0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندي نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولي ته تګ له امله لاس ته راځي

$$\leq \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad , \quad 1 = \lim_{x\to +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت 1 دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کيڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پيدا کوو، يعني له دې ځخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و ليکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$\frac{\sin x}{x} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} =$$

..............(4

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بيلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$\frac{\sin 2x}{x} \; 2\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2\sin 2x}{2x} =$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= \; 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\text{او}\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2} \times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په دریګوډي ګڃ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta /3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} = 3\frac{\tan\theta}{\theta}\;\frac{\tan 3x}{x}$$

نو $3 = 1 \quad \times 3 =$

بیلګه : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دېy = 2x ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} \; \frac{2\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7} =$$

$$\frac{\tan 2x}{2x} \; \frac{10}{7} =$$

$$\frac{\tan y}{y} \; \frac{10}{7} =$$

نو

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan y}{y} \; \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} = \frac{5\tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7} \times \quad = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅیرئ ، چې وښایاست:

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکی

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکی

پ) پوله پیدا کړی

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \mathrm{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \quad 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

بیلګه ۵ : حل کړی $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times= 2$$

بیلگه ۶ : وشمیری $\lim_{x\to0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3\lim_{x\to0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3\lim_{\theta\to0} \frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$= \frac{3}{5}\times\frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛ $\lim_{x\to0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to0} \frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\ \sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{-2\sin 5x \sin -x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \quad =2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$1 = 10\times 1 \times \quad = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړی $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دې $x - \alpha = y , x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha \ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \ . \ 1 = 6\cos 6\alpha$$

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} + \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\tan x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)"Continuity"

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکي يا يوه اينتروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدنې توګه د اينتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مور د د يوې تابع د ناپرېکيدنې(متماديت) په هکله څېرنه کوو او د ناپرېکيدنې يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه // // رسمه // // رسمه //

(3) (2) (1)

$f(x) = x^2 -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(رييل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي ((b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 -1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي $x=b$ کې ناپرېکيدونکې دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په $x=o$ کې ناپرېکيدونکې نه ده ياني پرېکيدونکې ده يا ټوپ وهي.

تابع په $x=a$ کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهي او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = o$ کې نه شته

بیلګه ۱ : وي دې $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کینې لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x = 1$کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; \quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکې ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\,3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلگه ۳: **وي** دې

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} \text{،} \quad x \neq -3$$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \le 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$$f(1) = 3.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \; ; \; x < 2$

$f(x) = 3 \quad x = 2$

$=x + 3 \; ; \; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 3) = 5$$

او

$$\lim_{x \to ^{+}2} f(x) = \lim_{x \to ^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x \to ^{-}2} f(x) = \lim_{x \to ^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $(\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکيدونکو يا متمادي توابعو خويونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکيدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ldots\ldots\ldots \;\&\; \lim_{x \to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)(a)$$

له دې امله (f+g) په x=a کې متمادي دي.

که تابع f اوg په x=c کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په x=cکې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په x=1 کې متمادي دي.

۲) وښيئ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په x=1کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

نو f په x = 1کې متمادي دئ $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$

نو g په x = 1 کې متمادي دئ

دويم خوي وڅيړئ

2) a) $\sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$

۲) الف)

$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې‌متمادي ده

(ب b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\, g(x)$

$= (f.g)(x)$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (حَل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بيلګه ۲ : وي دې

$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$

وڅيړئ، چې ايا $f(x).\, g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$

$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$

$f(x) . g(x) = 3x^2 + x - 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x).\, g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دی

په کينږ لور بند ايتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي يا ښايي، چيرته چې $f(a) \neq f(b)$. دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه ليکلی شو:

که تابع f په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکي) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه يو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بيلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$

وښايی، چې يو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ يو پولينوم دی نو f په بند اينتروال $[1,2]$ کې متمادي دی. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$$f(1) \neq f(2) \text{ او } 5 < 11 < 16$$

له دې امله يو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = 2x + 4; \quad -1 \le x < 2$

$; \quad 2 \le x \le 20 |x - 10| =$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x \to 2^-}$

$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x \to 2^+}$

له دې امله لرو

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20 - 10| = 10 \quad \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$

په دې اساس لرو $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو $c \in (-1, 20): \ f(c) = 6$

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ نو موږ لرو :

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دئ ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) اوf(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0سره کم له کمه یو C دa او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دئ . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایئ، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دئ.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دئ

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، کهx ته‌ږلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ته‌ږلی و L ته ځي دا دئ، چې x ته‌ږلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

قصیه : که$f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کیڼې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

که f او g توابع وي، c;L او M حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x)=L$

او $\lim_{x\to c} g(x)=M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$$

$$2)\ \lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$$

$$3)\ \lim_{x\to c}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)=L\cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};\ (M\neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$$

(د $f(x)\geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کیږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

پیژند : f دې یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انتروال کې چې $x=c$ ولري ،تعریف وی، نو وایو چې f په $x=c$ کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

---

1) f (x) تعریف دی 2) $\lim_{x \to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په $x = a$ ې متمادي وي او له کیڼ لور په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په$x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په $x = c$ کې متمادي دی.

اول) د جمعې f+g تابع

دویم) د تفریقf-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابعf په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د x->±∞ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي يانې □□ .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}= \frac{-3}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي يانې □□ .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}= \frac{5}{+\infty}=0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، يانې
ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

ځلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}= \frac{-3}{+\infty}=0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي يانې □ -.

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

څېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

څېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

ځیره G_f پرته اسیمپټوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو یو کوچنې مثبت یا منفي عدد یانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

ځېره $\mathbf{G_f}$ یو پروت اسیمتوت$y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کیږي.

شمیرنیز حلونه

دویم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرچ د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1 / x$ و صفر ته نزدې کیږي.

ځیره G_f یوه مایله اسیومپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لویه ده.

دریم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدې کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېره پرته اسيمپټوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

او ل : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\qquad\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباى په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad 0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او ببیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه يې یو يې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \quad 0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله يې 0^{-} دی، یعني لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټاکی

1.1.1. a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1}$

d) $\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim_{x\to8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

b) $\lim_{x\to3}\frac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim_{x\to-1}\frac{x^4-1}{1+x}$

d) $\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$

b) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

d) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

d) $\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$

d) $\lim_{x\to0}\left(\sin x\frac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

f) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

h) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}$

j) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندې بلواکو کیڼ او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواک : لاندې بلواک د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دي او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

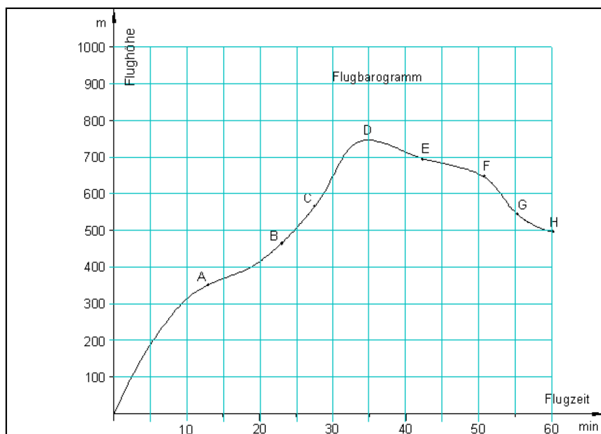
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

II.1.د تابع تغير منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د رياضياتو يوه غوره برخه، چې د رياضياتو زړی ورته ويلی شو ، تر څېړنې لاندې نيسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د يوه يادښت په څېر راوړم:

که له يوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغير منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په يوه ټکي يا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، ميل اويا تانجنت دی او دا درېواړه کلمې د رياضياتو له مخې په همغه يوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په يوه ټکي کې د تابع د ګراف ميل(جګېدنه)

	په الوتکوکې د الوتنېدليک(الوتنليک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې يا د وخت تابعيت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم ليکي. که دا په پښتو واړوو، نو د ليک بکس به ورته ووايو.

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالی ښووول شوی.

-ايا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زيات دی؟

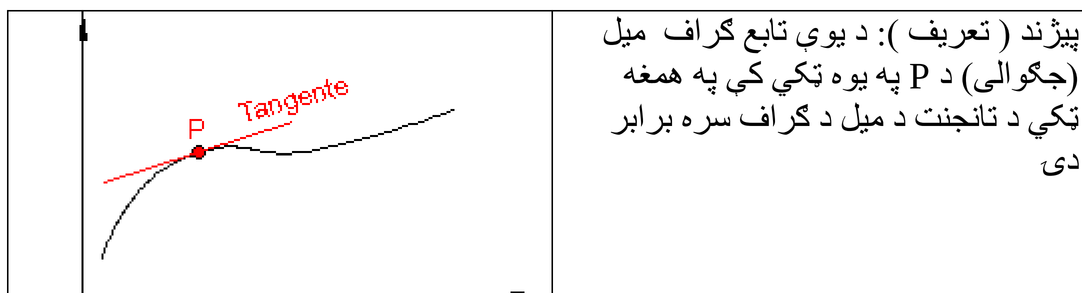
-ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زيات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ايا د يوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
١ - ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.

٢ - په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.

بريښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دی:

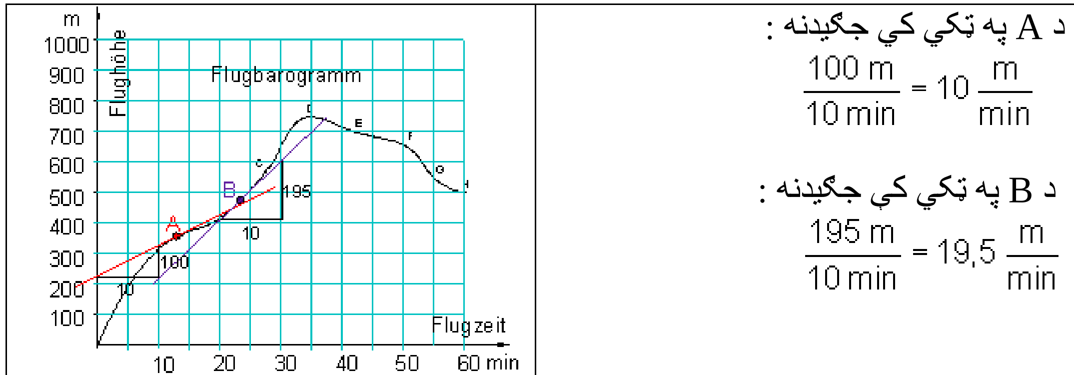
پيژند (تعريف): د يوې تابع ګراف ميل (جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی	

ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمسټکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.

ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.

د ګراف د جګيدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.

د ميل يا جګيدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدی شي:



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګېدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګېدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چي د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چي د ګراف میل د A اوB په ټکو کي هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کي د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کي د تابع دګراف میل (جګیدنه):

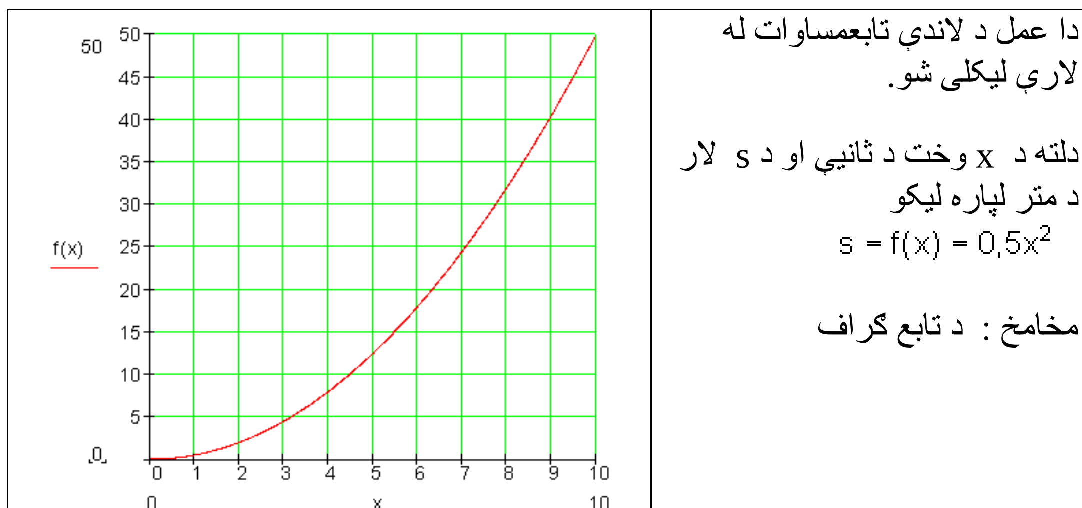
معلومه ده ، چي یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کي ده .

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$s = f(x) = 0{,}5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



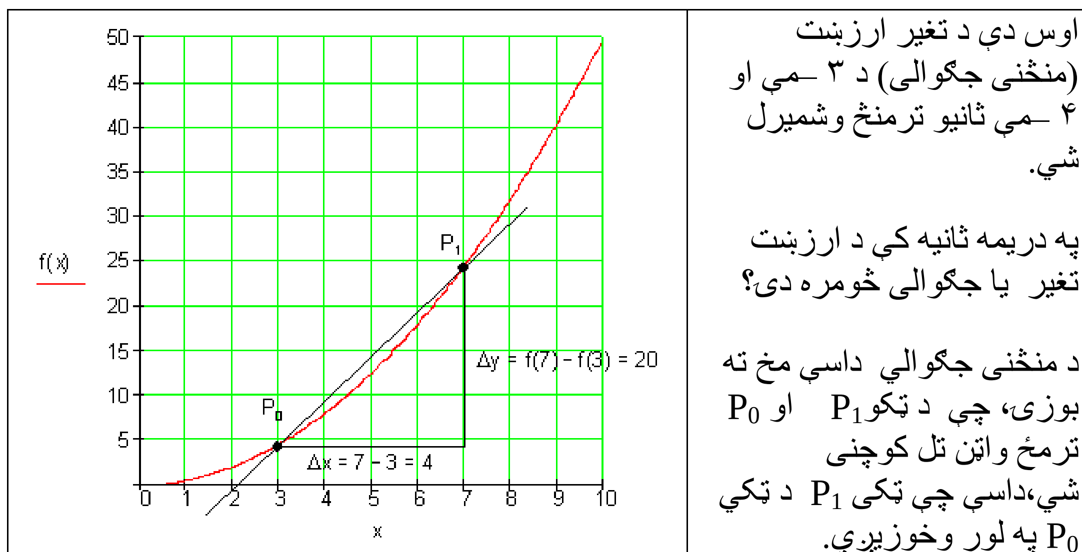
اوس باید منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمي او ۷ ــمي ثانيې ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانت انځورو او د هغې چټکوالی شميرو.

اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمي او ۴ ــمي ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چټکوالی څومره دی؟

د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي.



د ۳ ــمي او ۷-مي دقيقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{24,5-4,5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ –مې او ۴ –مې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{8-4,5}{4-3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دئ

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\frac{0,5(3+\Delta x)^2-0,5\cdot 3^2}{\Delta x}=\frac{0,5\left[9+6\Delta x+(\Delta x)^2\right]-0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$=\frac{0,5\cdot 9+3\Delta x+0,5(\Delta x)^2-0,5\cdot 9}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x}=3+0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x)=3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

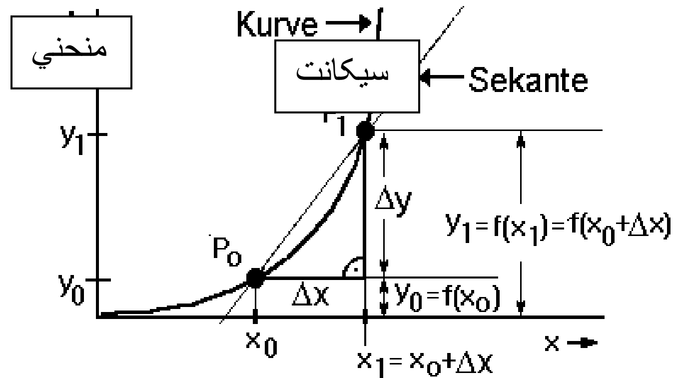
د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پيژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېره وګورئ)



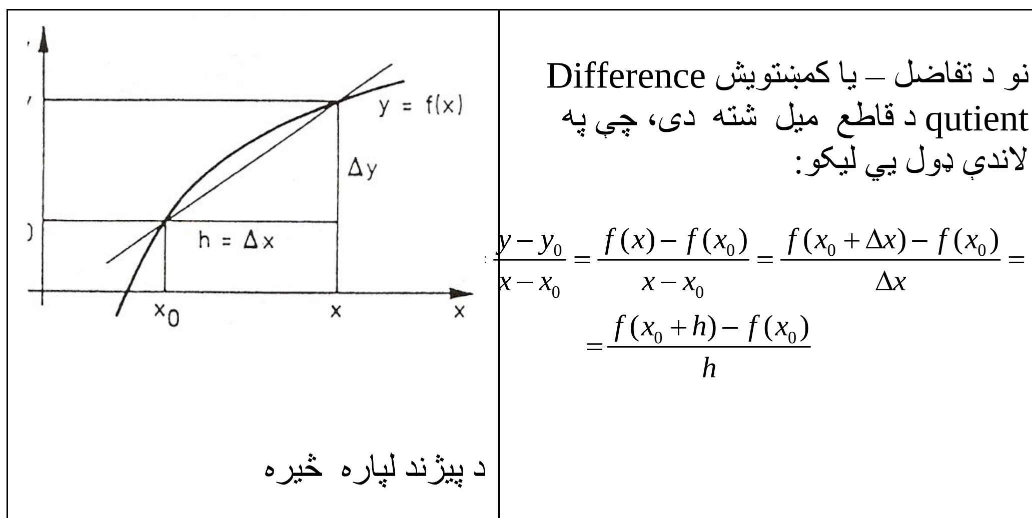
پایله : د قاطع(غوڅوونيsecant) ميل يا جګيدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم يوه کرښه ده نو ،،ميل (جګوالی) ،، يې هم د يوې کرښې ميل په ډول شمېرل کيږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال په يوه خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څيره دې وکتل شي).



د پیژند لپاره خیره

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:

د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) جګوالي څخه و د تانجنت جګوالي یا جګیدنې ته

یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع جګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع جګیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابته جګیدنه، لکه په لانیز تابع $f(x) = a_1 x + a_0$ کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$

په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د جګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیرو.

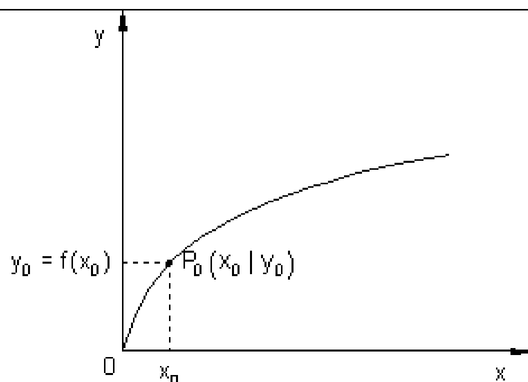
نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار-وخت دیاګرام کې وڅېړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

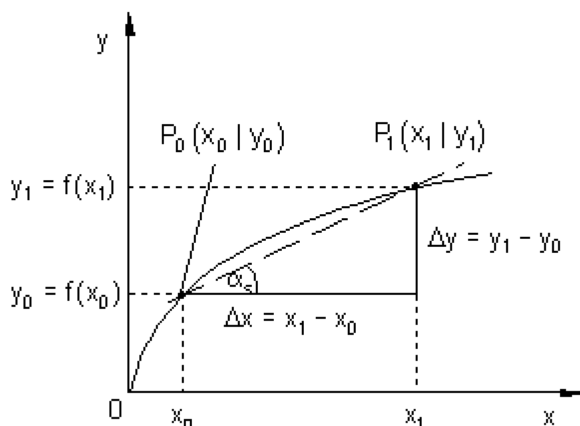
د یوه تابع د جګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې ځګوالی پیداکړی شي.



ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی ځګوالی په نږدې توګه (تقریبي) پیدا کوو.

ددې لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نږدې کې ټاکو.



کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،یعني سیکانت، يو ځګوالی ښايي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی ځګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan\alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	د سیکانت د ځګېدو کونج
$a_s \triangleq$	د سیکانت د ځګېدوضریب

دا د ځګوالیمثلث له لارې ټاکل کیږي.

<table>
<tr>
<td>که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولي حالت په ځېږ یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښایي.</td>
<td>

α_t =	د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج
a_t =	د تنجنت د جګوالي ضریب
</td>
</tr>
<tr>
<td>داحالت یا تللار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څیر افاده شي.</td>
<td>$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$</td>
</tr>
</table>

II.2.2.کمښتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

ارزښت)

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

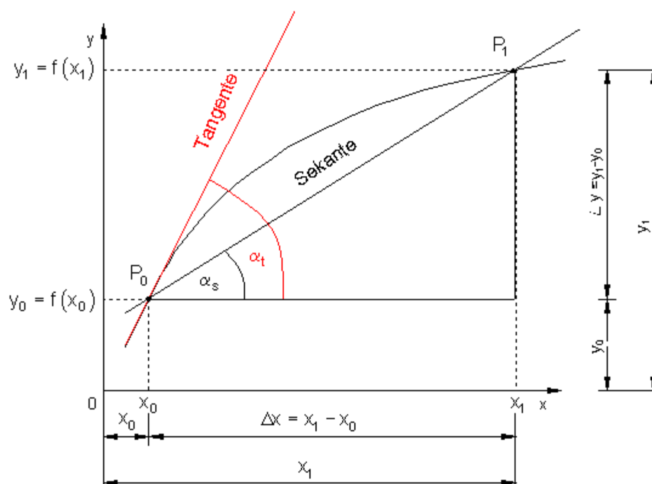
د تنجنت جګېدنې سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترګو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرنې لاندې نیسو:

د یوې کربنې میل یا جګېدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

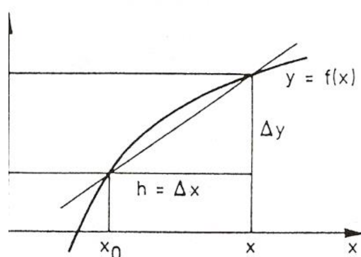
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

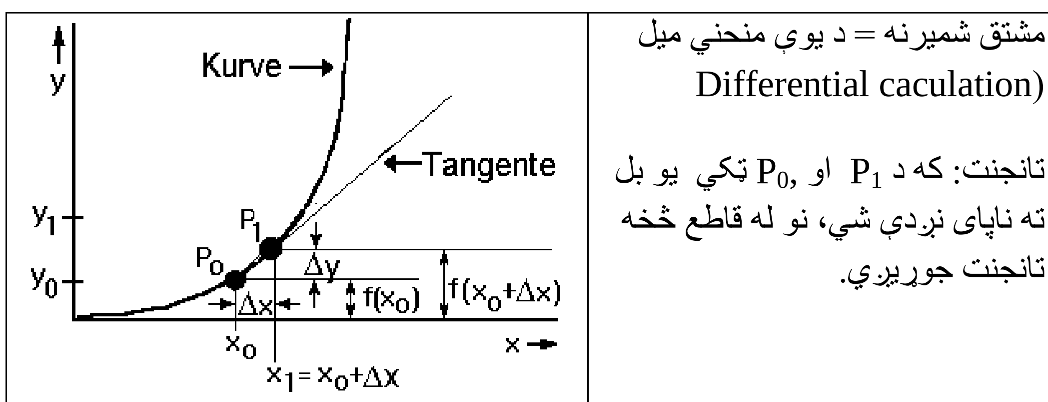
پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

<table>
<tr>
<td>پېژند(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$</td>
<td>د پیژند لپاره څیره

</td>
</tr>
</table>

د f تابع غوخي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا جګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.



مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

پایله : د تانجنت جګیدنه : د تانجنت جګېدنه د قاطع د جګېدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) $x- > x0$ او(همداسې)⇔ $(x->0$او یا په (همدې ډول)⇔
$h- > 0$ لپاره یو حد ولري , نو د $y = f(x)$ تابع د$x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او دې لپاره لیکو:

.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د y = f(x) تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

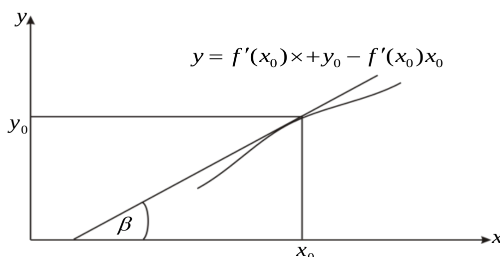
د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

پيژند 2:

که يو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کې مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چې د (x_0, y_0) ټکي څخه تيريږي او ميل يا جګوالی يې $f'(x) = \tan\beta$ دی‌په لاندې ډول ليکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y = f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه ۱:

د يوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دی

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلګه ۲:

يوه $f(x)=x$ خطي(کرښيزه)تابع لرو.

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0)=c\,u(x_0)$ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$
heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تابع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$
$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$	$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

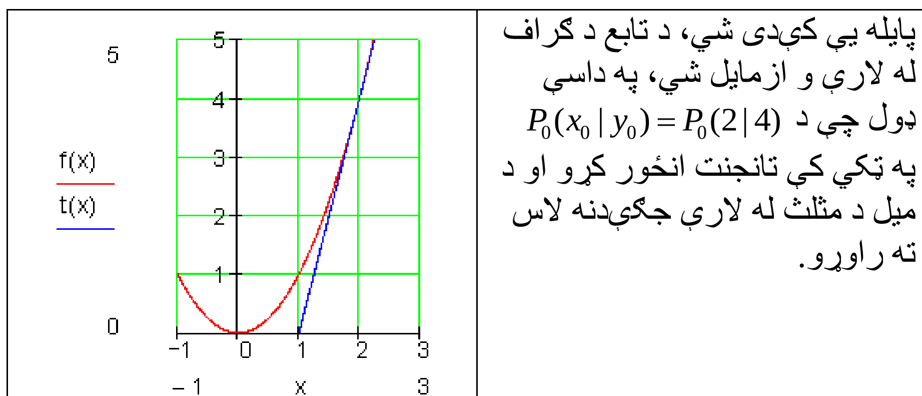
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



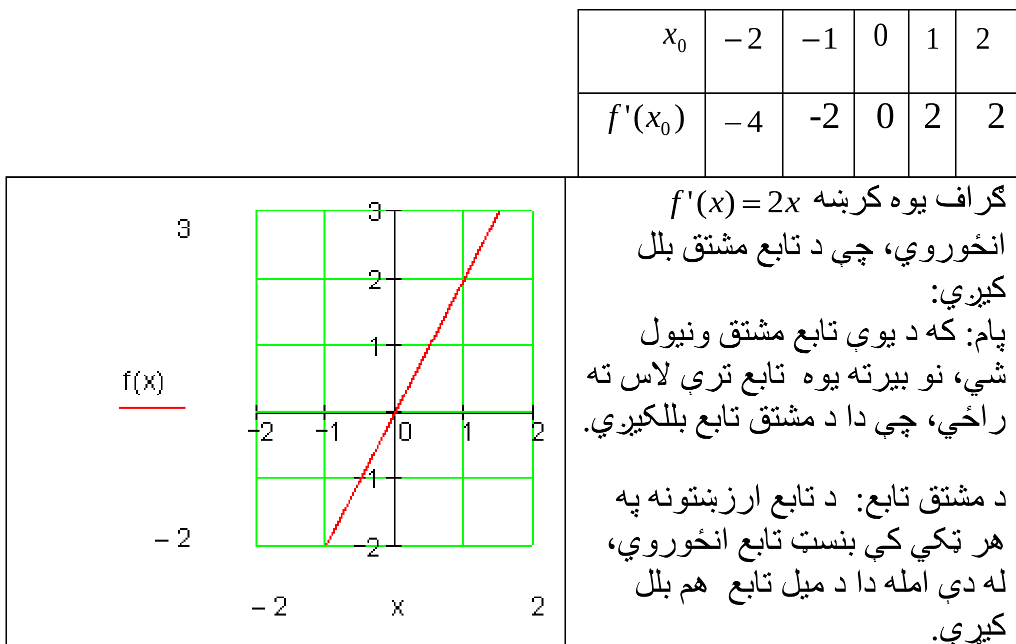
پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

---

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2



ګراف یوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي:

پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنست تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

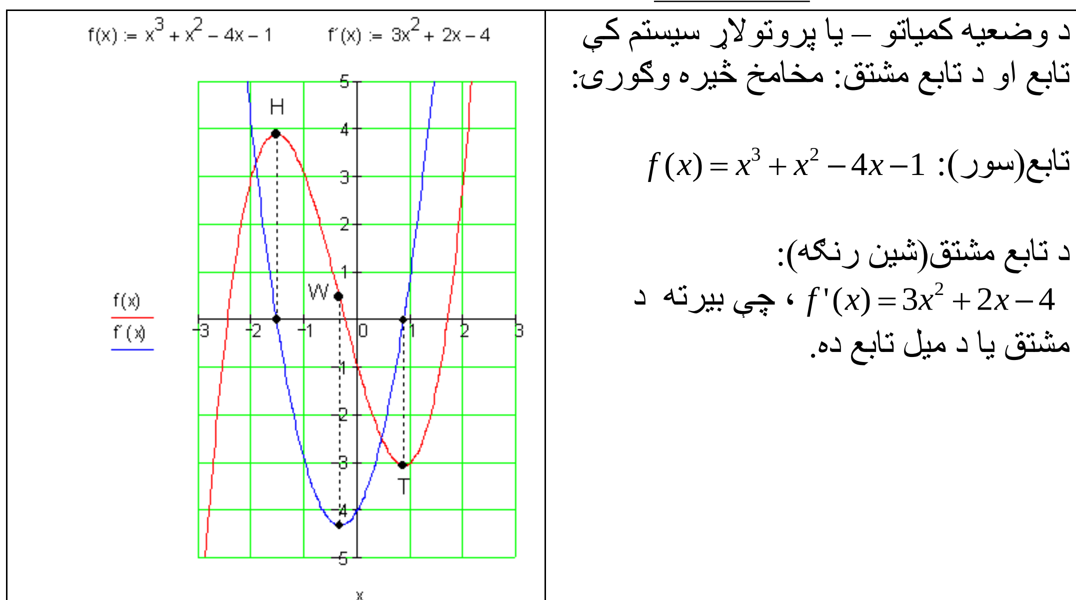
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0)=3x_0^2}}$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $\underline{\underline{f'(x_0)=3x_0^2}}$



د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګورئ:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین رنګه):
$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دئ

او د مشتق تابع $\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$ ده

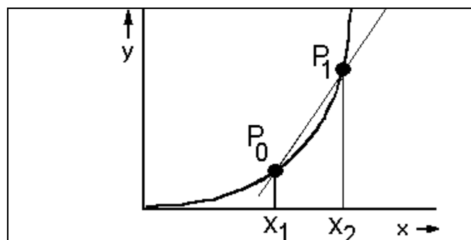
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x) = 1 \cdot x^0$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = 2 \cdot x^1$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \underline{\underline{-\frac{2}{x^3}}}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

مخامخ څېره یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.	

y P0 P1 x1 x2 x→	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي
y P0 P1 Tangente x→	بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي
Kurve Tangente P1 P0 Kurve Tangente	چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 اوP_0 په شاو خوا ْزوو یا لویه وو: كه د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پایله):
ومو لیدل، چې د تانجنت میل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې كه څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره لیکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

.

.

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \quad P(2\,|\,f(2))$$

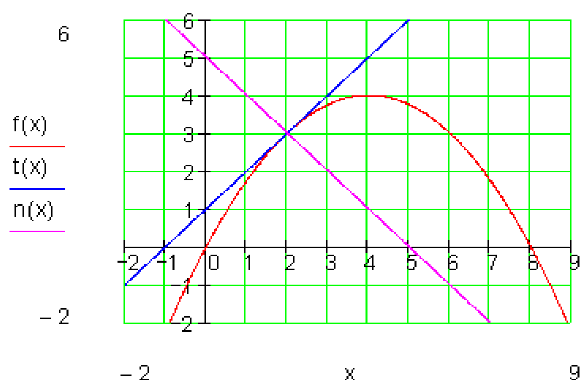
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2) + 3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

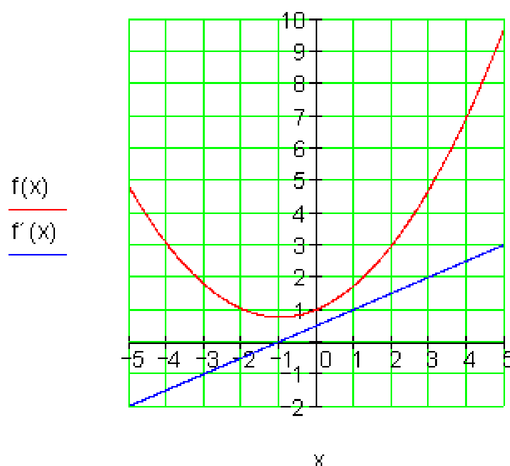
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $\quad$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

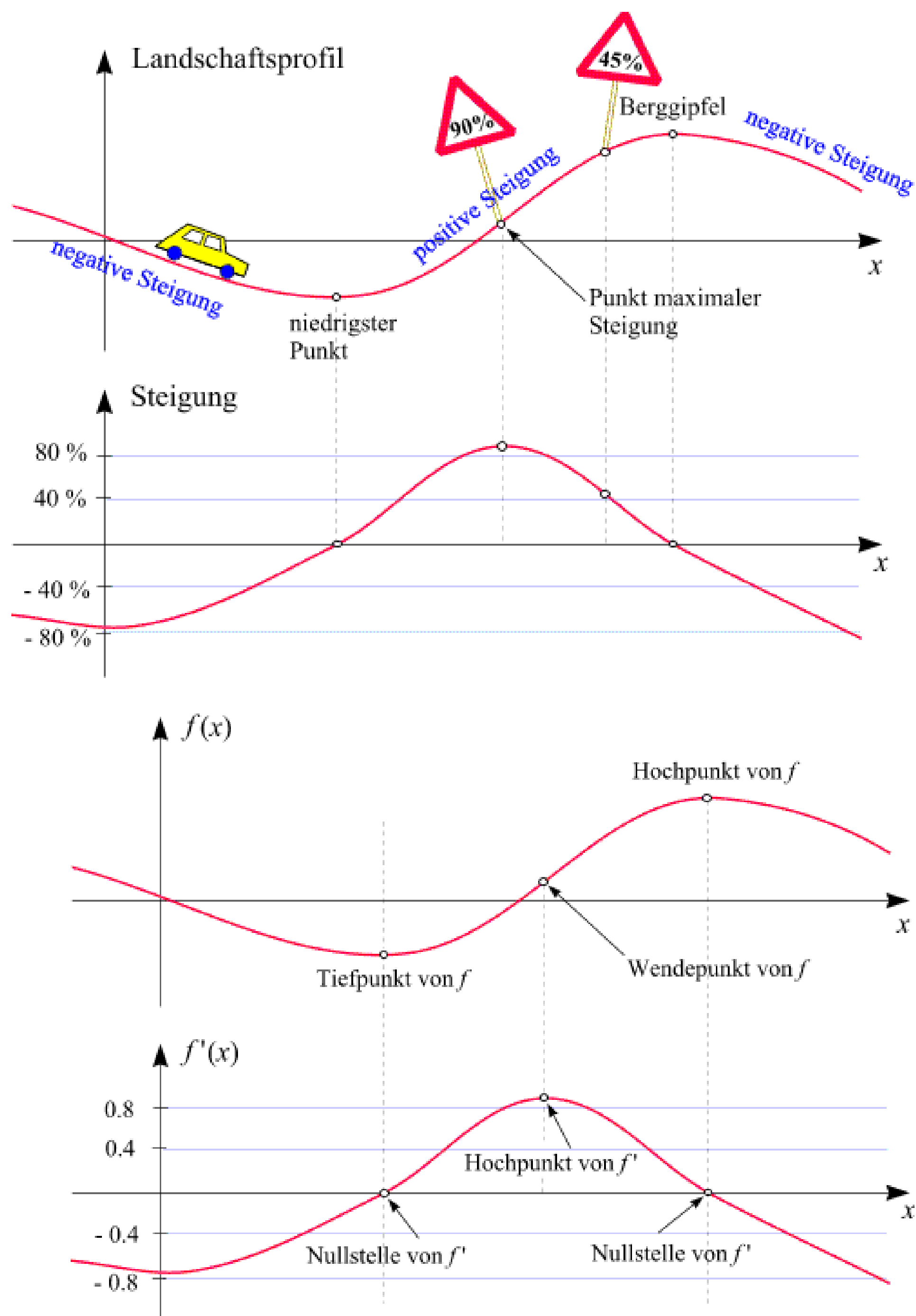
په بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

لاندې د د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټیږي یا

کښتپورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کرښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کرښه(مثبته جګیدنه، (پسې کرښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.


Landschaftsprofil
90%
45%
Berggipfel
negative Steigung
positive Steigung
negative Steigung
x
niedrigster Punkt
Punkt maximaler Steigung
Steigung
80 %
40 %
- 40 %
- 80 %
x
f (x)
Hochpunkt von f
x
Tiefpunkt von f
Wendepunkt von f
f '(x)
0.8
0.4
Hochpunkt von f'
x
- 0.4
- 0.8
Nullstelle von f'
Nullstelle von f'

دپورته پښتو: له پورته کښته له کيڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د ʻf جګ ټکی، د ʻf صفرځای، د ʻf صفرځای.

دیاګرامونه په کره توړه وګوری او وهڅیږئ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.
چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د ځګیدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توړه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دویمه منحني (کړې) کې یو ه څوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کړې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کړه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهڅdړی، چې وپوهdړی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنګه اړیکې لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې f(x) مینیمال (خورا ټیټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسیمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

مورږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورږته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

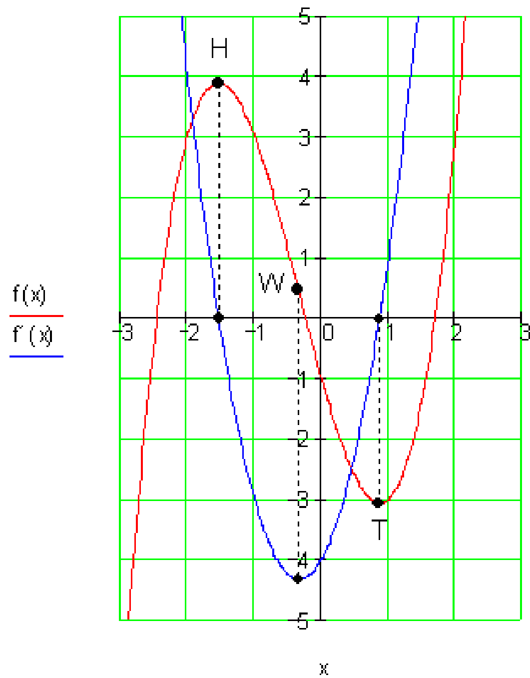
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. مورږدا د مشتق تابع او یا د جګیدنې (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د دواړو توابعو ګراف په يوه قيمتي وضعيه (پروت ولاړ سيستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) يو جګ ټکی (H) همداسي ټيټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت يا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مينيموم لري، چېرته چې د f(x) جګېدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قيمت له مخې خورا لويه ده.

II.3.د مشتق شميرني قوانين

قضيه (د جمعې يا زياتون قاعده يا لار):
که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بيلګه:
د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشميرئ.
ښوونه:

$$f(x) = 5x^2 + 3x \quad u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$$
$$\Rightarrow u'(x) = 10x \qquad v'(x) = 3$$
$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2، ......، f_n توابع او k_1، k_2، ....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)]'$$
$$= k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + ... + k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x) \cdot g(x)' = f(x)' \cdot g(x) \cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې ډول ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\ \frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad\qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د **(*)** اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$
$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$
$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بېلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بېلګه:

د $y=\sin^2 x$ تابع په لاندې ډول ترلی ورکړ شوی.

$$y=z^2 \ , z=\sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بېلګه:

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

قضیه :د ساین تابع y=f(x)=sinx مشتق غواړو وښایوو چې f'(x)=(sinx)' = cosxدی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د y=f(x)=sinx ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

د لیمیټ د برخي په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي بنوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\ \frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د د پولۍ او د پولۍ یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \ , x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y = f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګي :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

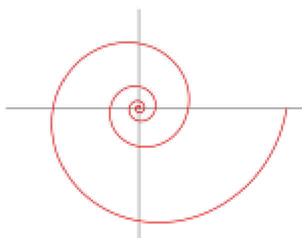
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د $f(x) = x.\sin x$ تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق





قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د $x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی $x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړی برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلګه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلګه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

--- -----------------------

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$

اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټآکو:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln2)= 1/(16\cdot0.69)= \underline{0.09}$

پای

اوس دې يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غير مستقيم خوندې يا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع يا بلواك مشتق ونيسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځير قاعدې له مخې ترخيرني نيول کيدی شي، د $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$

لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخې را پيداکيدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

اوا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کې نيولو سره او د جملې 20-10 له مخې لاس ته راځي

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسې $f = x,\ g = x$ ځاې په ځاې شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیڅیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$ پس کیدی شي چی فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

د $u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2+2).\lg x\ (x>0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad , \ f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \qquad , \ x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1 + k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1 + k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1 + k)}$$

د لوګاریتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\quad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ':f\ '(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D\ '(f)=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f\ '(x)=b^x\cdot\ln b$$

قضیه : د $y=f(x)=e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y=f(x)=e^x$$

$$f\ '(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0+\Delta x}=e^{x_0}e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره څیړو $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

$$f'(x) = b^x . \ln e = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= e^x ; x \in IR$$
$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR$$

ګورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله دی $f'(x) = e^x ; D(f) - IR$

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

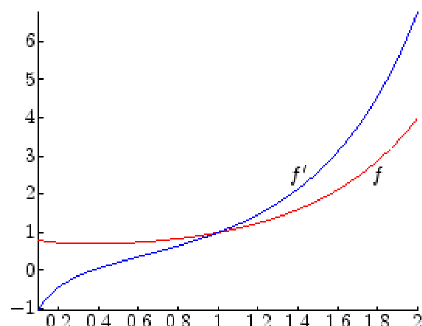
$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیګ



د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هخيږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوريزه متمادي ده. د مشتق لپاره يې دا حالت ده دی.

د $x^x \to 1$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تابع په صغر کې يو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} \, .$$

)ليکونکي اپپ او هيوليګ

په طبيعت کې يې خيرنه:

د اکيوننشل توابعو مشتق

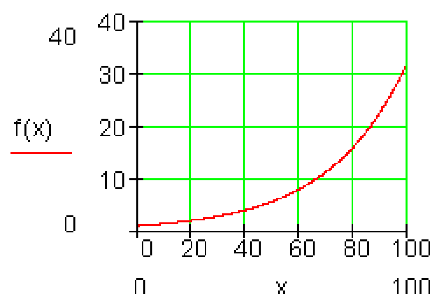
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټي ويش (حجره وېش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو

کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او گراف یي کاړو. دلته
د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقیقې
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکتریاگانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقیقې y = د بکتریاو تعداد



بیلگه: لرو : $f: f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

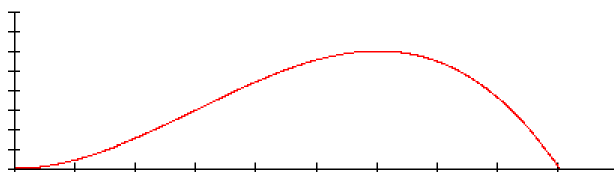
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

- د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووبشتونې) x په واک کې وي.

په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)



بیلګه: د یوه په برابرړوله بیره (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0 = 4\frac{m}{s}$ او $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

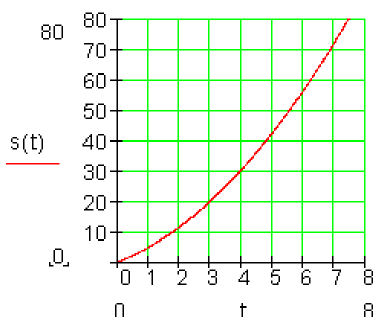
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(t په s (ثانیه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:



$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$ $v=s'(t)=1,8t+4$	
په v-t - ډياګرام کي يوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتيا په برابر ډول زياتيږي. دا دلته ثابته جګيدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بيړه(تعجيل) ده.	v(t)
د بيړي يا تعجيل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$	a(t)

پام : د يوه برابرډوله په بيړه (تعجيلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$a(t)=v'(t)=a$ $v(t)=s'(t)=at+v_0$ $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

د يوې چټکتيا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$. هم ليکو.

فعاليت:

۱) د يوه خوزنده تن يا جسم د لار-وخت-دياګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشريح کړی. ب : دې پورې اړونده د چټکتيا – وخت – ديا ګرام وکاږی.	s/m, t/s

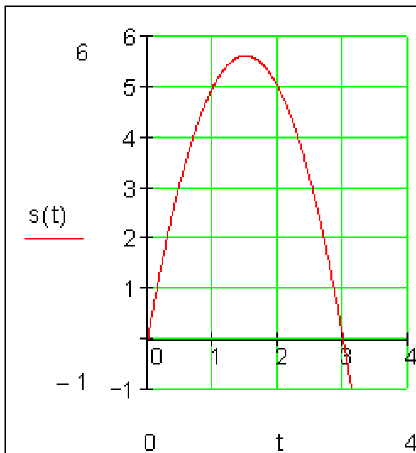
---

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی.

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې دt وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیړارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

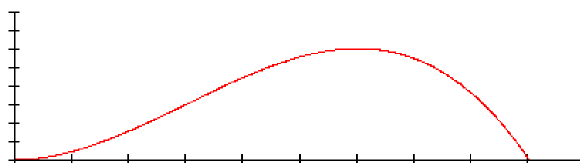
$$t = 2 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرين : لاندي د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \; ; x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې خيره لري.



لاندې پوښتني ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جگ(ماکسيمال) جگوالى لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لري بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبي د دفاع دېوال د توپ وهني ځاى څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دى. ايا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوى دى؟

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چي د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چي د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

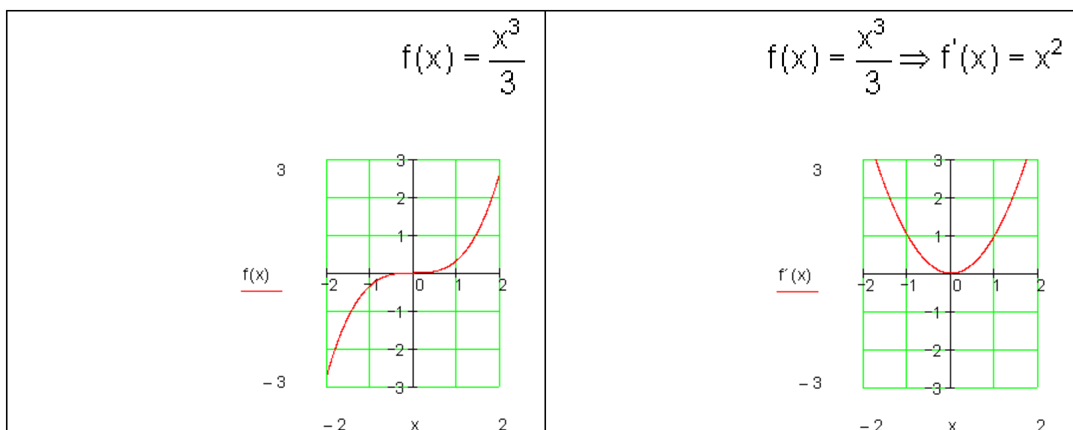
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

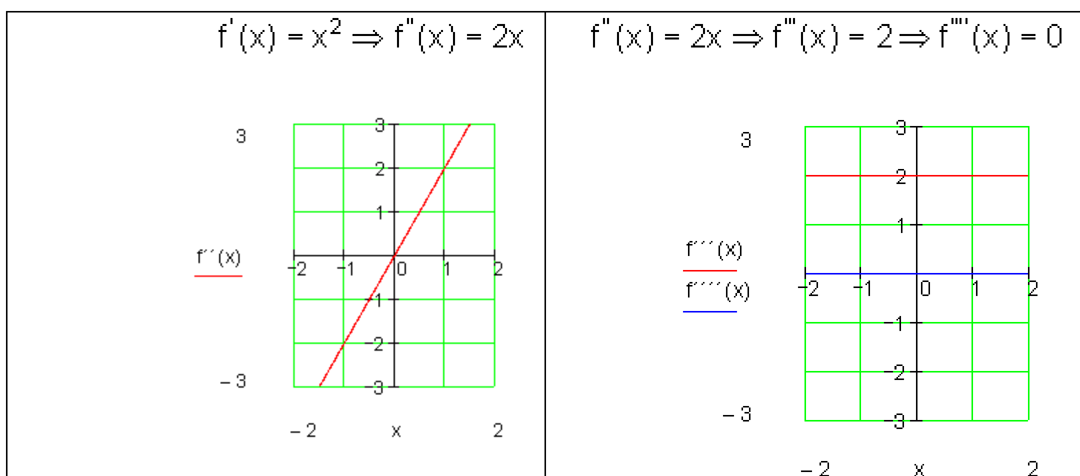
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

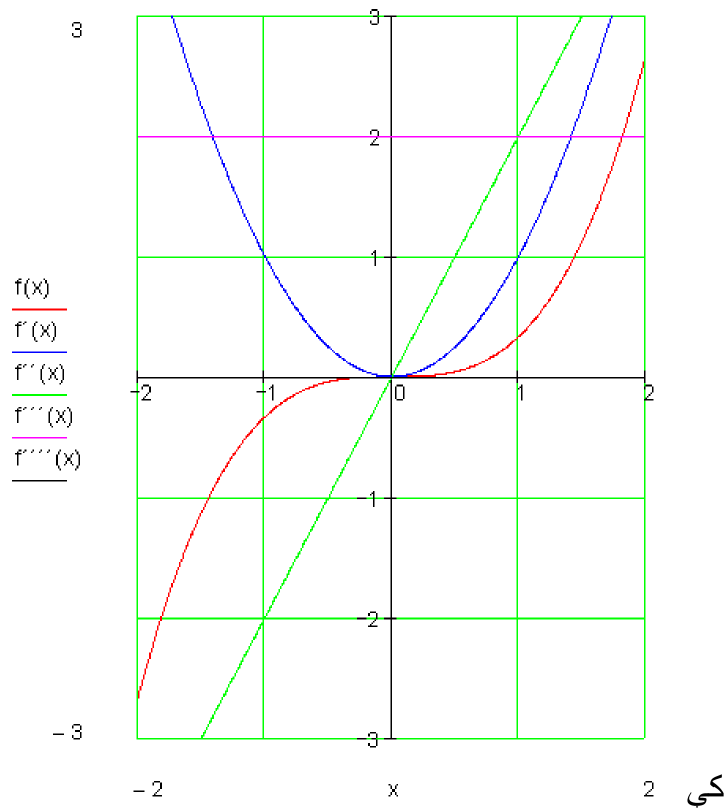
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره





د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کې

بیلګې:

اول :

$$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$$
$$f'(x)=12x^2-4x+1$$
$$f''(x)=24x-4$$
$$f'''(x)=24$$

دویم:

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$
$$f'(x)=\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$
$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$
$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

ټولګه: د $f(x)$ لومړی مشتق د$f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د$f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوشه ویاند تابع$f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: Y = 3x²+7x

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه Ex²+7x+y=0

فعالیت: که Ex²+7x+y=0ولرو، څنګه کولی شو، چېددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2=1$ لرو، غواړوdy/dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y}\quad\vee\quad\frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f\left(x\right)=x^{x}$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ االکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x)=x\ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y}\,f'(x)=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y=f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y}\,f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x)=x^{x}$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x)=y\left(\ln x+1\right)=x^{x}\left(\ln x+1\right)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2+y^2=r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y=f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیڅیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګئ یا بیضوي) له لارې لرو:

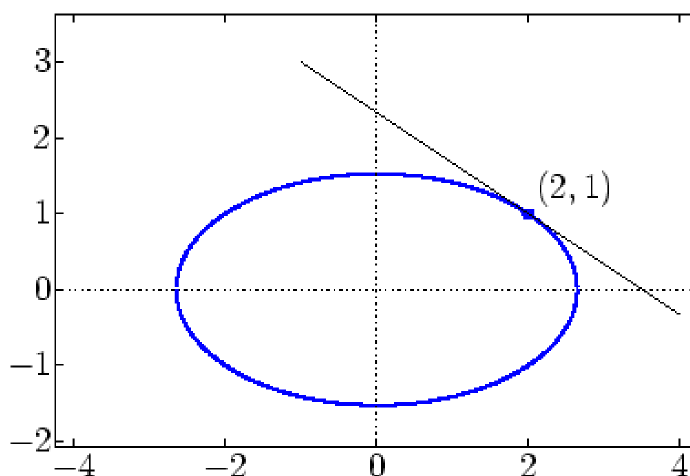
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

له همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$.

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینسوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

-- ------------------

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

.

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوبنه د هرې شننيزې یا سپړنيزې(تحليلي) ويينې یا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګېدنه) یا منځنی تغېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د ویش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

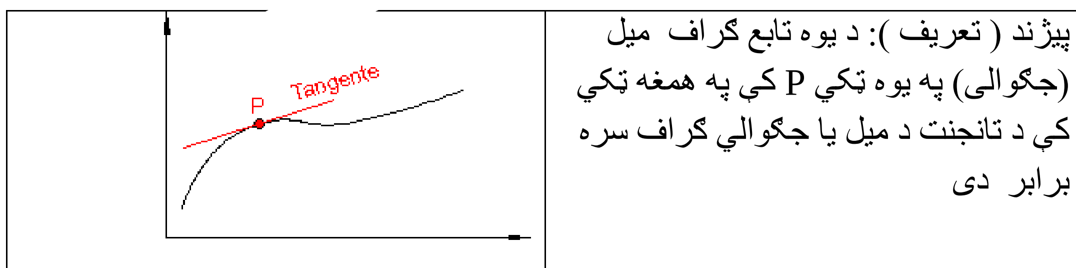
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا كمپيتريست سرته رسوم)



پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کي په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی

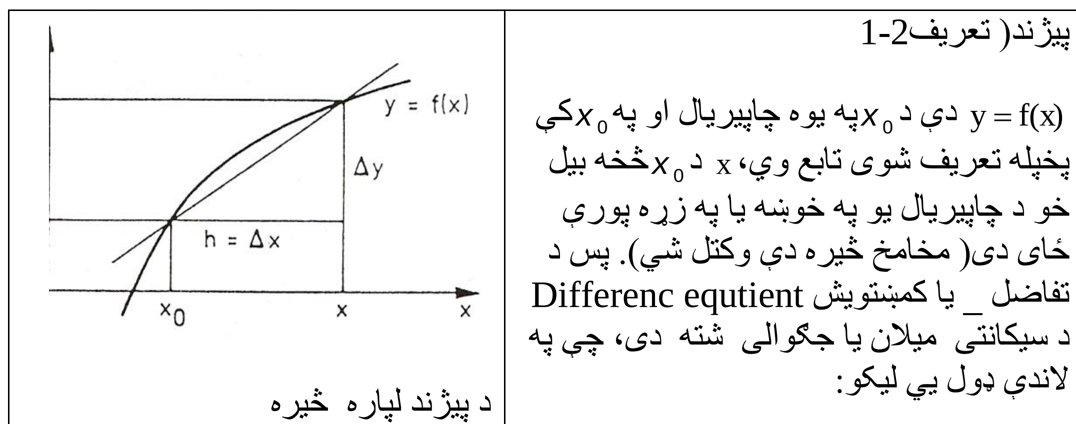
د کمښت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيوني ټاکلکېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



د پيژند لپاره څيره

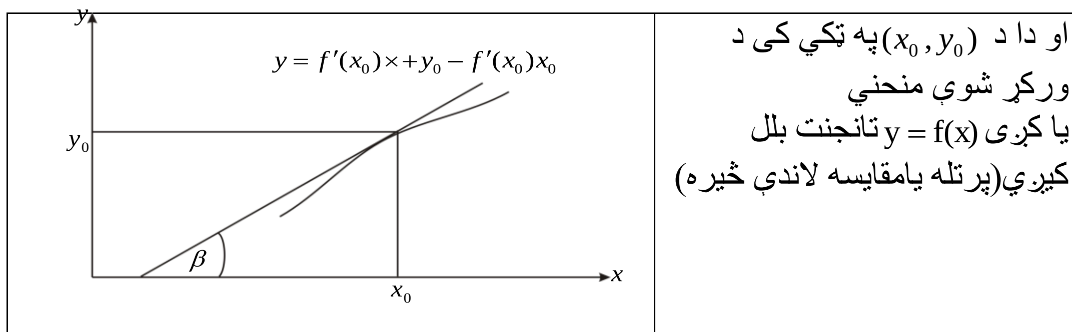
پيژند(تعريف1-2

$y = f(x)$ دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمښتويش Differenc equtient د سيکانټی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پيژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\ \Leftrightarrow\ f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$



او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کږی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې ځیره)

لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په ځیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.

د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه	د قاعدې نوم	فرمول
۱	د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲	د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳	د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

ګڼه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۴ – وېشقاعده	
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b > 0, b \neq 0, x > 0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

دا چې کیڼ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

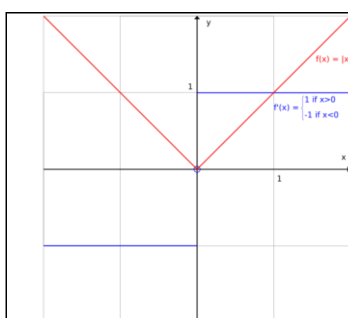
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

په صفر ځای کې سره له دې یو ښي اړخیز مستق ورکړ شوی، یعنې لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

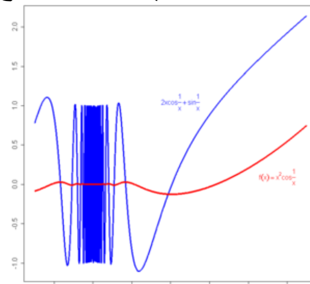
او یو کیڼ اړخیز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



که مخامخ ګراف ته وګورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقوړ تابع باید ګوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کیږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

د بیلګې په توګه:

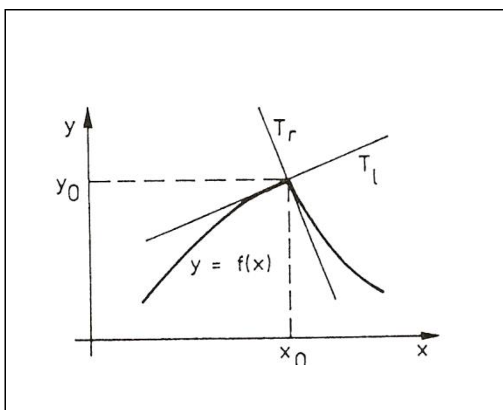
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

یې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (ځېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

	که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دې ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چی مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x\to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x)-f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x\to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.
دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \ n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \ .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعنی داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د y=f(x) تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د(y=f(x تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د$x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې$f(x)-f(x_0) \to 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د ناپرېکیدني یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي $x=x_0$ کی تعریف دی. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د $y=f(x)$ یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څښ تابع د بیلګې به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$
په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$
او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني
$x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې
د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

-- ----------------

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

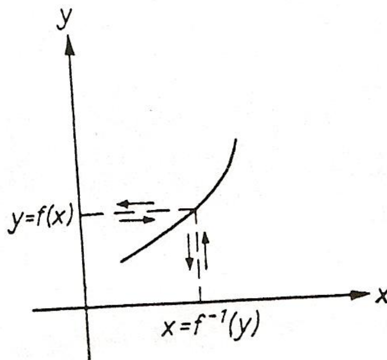
جمله:

د معکوس تابع مشتق : که $y = f(x)$ د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د $f'(x) \neq 0$ سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د $y = f(x)$ سره مشتقوړ دی او باوري دی

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له $\Delta x \to 0$ او هم $\Delta y \to 0$ او معکوس څخه، د $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:	$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$ 

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4......$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x) nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښې کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه ځېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټبتابع مشتق ځاي په ځاي شوى. له کيڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دويم درځ يې تابع $f(x)$ ښاى او په دريم درځ کې يې مشتق $f'(x)$ ځاي په ځاى دي او په څلورم درځ کې د راپيداشوې پارامتر او د متحولې x نيونى ځاى په ځاي شوي. که چيرې د واريابلى يا پارامتر لپاره نيونى نه وي شوي نو په خوښه نيول کيدى شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \quad ganz, \quad x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \quad a \quad reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \quad a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \ x$	$\cos \ x$	

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د ځل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډيرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځي د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله يواځي د $x > o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

-- --

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{(3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x}$$

لکه چې بنسټيز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوې سپړنيزې افادې هرچيرته متمادي يا ناپريکيدونکی وې، چيرته چې تعريف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټيز بلواك يواځي تعريف ډيري کی رابيليدوړدی، په دې کي کوم تغير نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټيزې عملي استعمال شي. يعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټيز بلواکو د څلورو بنسټيزو عمليو له لارې جوړې شوي شننيزې (تحليلي) افادې د دوي تعريفډيري په دننه کی رابيليدوړ ده.

که څوك ځنځيري بلواك جوړوي نو دا وينا بايد نوره هم رابنده يا محدوده شي

بيلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^2(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ يعني$x>-1$ تعريف دی او هلته هم نه پريکيدونکی يا متمادي (د$x=-1$ په غاړه طبعآ ښی اړخيز) ده.

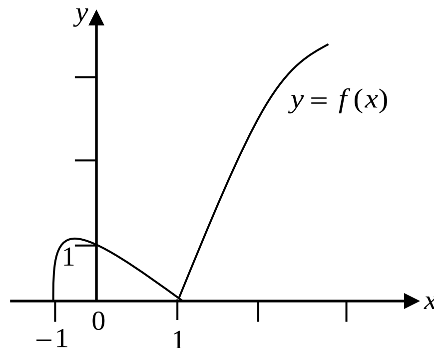
دا په ځانګړې توګه د $x=1$لپاره هم ناپريکيدونکی يا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پيژندډيرئ يا تعريف ډيرئ دننه $x>-1$ دئ، او هلته تابع يا بلواك په واقعيت کی نه پريکيدونکی يا متمادي دئ .اوس نو مخ ته پروت تابع يا بلواك تړلی(ځنځيري) ورکړ شوی:

$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

z = g (x) = (x -1)2 (x +1) = x3 - x2 - x +1

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ يا رابيليدوړ دئ، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځيري قاعده يواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x>-1,\ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د نتني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفدیري دننه وښايي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفدیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د نننی بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2},\ u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د -1 ، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$لپاره پس د $-x_2 < 11$ 1 لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0 \qquad \text{او یا}$$

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \qquad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژندډېری پا تعر یفډیری دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفډیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی همل‌ته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\begin{aligned}
\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}\\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur\ \ 0 < x < 1,\\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur\ -1 < x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

اوس دي يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کي غير مستقيم خوندي يا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك ديفرنځيشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخې ترځيرني نيول کيدی شي، $y = e^z,\ z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v,\ v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخی را پيداکيدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{او}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$ هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بيلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابيليدوړ دی. دا دې داسی ځاي په $f = x,\ g = x$ ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ \ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چی د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\ \ x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ يې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}\ ,m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه ځيړلي او د ځنځيری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m . z^{m-1} . \frac{1}{n} . x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} . x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بيلګه : يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډيری) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيری) M کی توليد کړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخيره کونې) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو. کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د

تولیدډیری M څخه نه شي ستربډلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

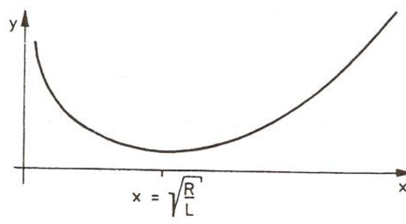
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی $f(x)$) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کږې تګلار په ځیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

ځرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$
پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او$x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید

ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره

صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .

یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.   پای

د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :

که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي او د c د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته

لږ تر لږه یو عدد k د f(a) او f(b) ترمنځ شته، داسي چې $f(c) = k$ دی

د وایرشتراس قضیه Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکي وي، نو f په دې اینتراوال

کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.

کیدی شي چی یو یو غږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)

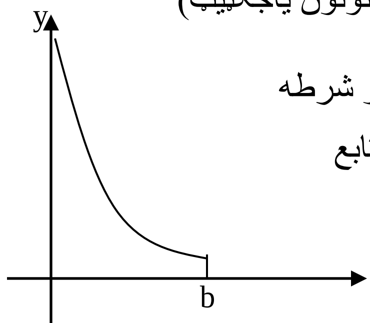
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه

حتمي دی. د بیلګې په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع

په نیم بنداینتروال (0,b]کی متمادي ده،

مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې

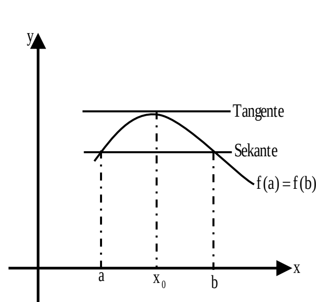


توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چی د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:



يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b]
کې متمادي وي د(f(a)=f(b سره
او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ،
نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a,b)$ شته دی
د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

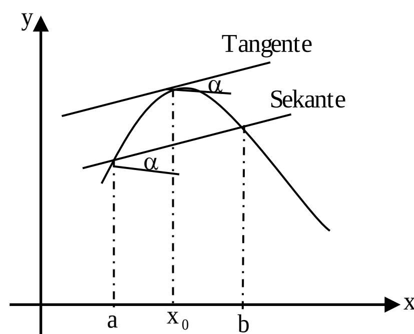
تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟

ځواب يی لاندې قضيه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اينتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اينتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خيره ښه نه ده انځور شوې تيک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې بايد د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چی د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري:h(a)=h(b)=0 . برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x \in (a,b)$شته دی د h'(x)=0 سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0, \text{ يعني } f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

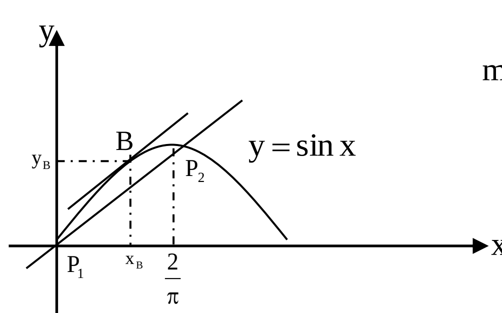
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلگې نوره هم روښانه کړي.

بيلگه :

د f(x)=sinx يوه تابع دې داسې ورکړشوې وي،چې په يوه ټکي $B(X_B, Y_B)$ کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه ميل يا جگوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) ميل ياجگوالی:

$$m = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$



د منحني ميل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دې ځخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\frac{2}{\pi} = 0{,}88$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عموميت ځخه لاس ته راځي:

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال[a,b]کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او v=g(x) مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یې دا مشتق لاس ته راځي:

که په u=h(x) تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د h(v)=f(x),v=g(x) او $x_0 = g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•

•

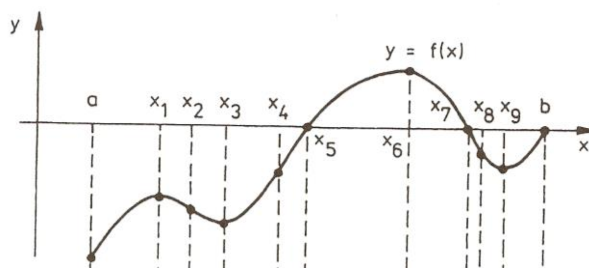
•

•

•

یوغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکي توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جکیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

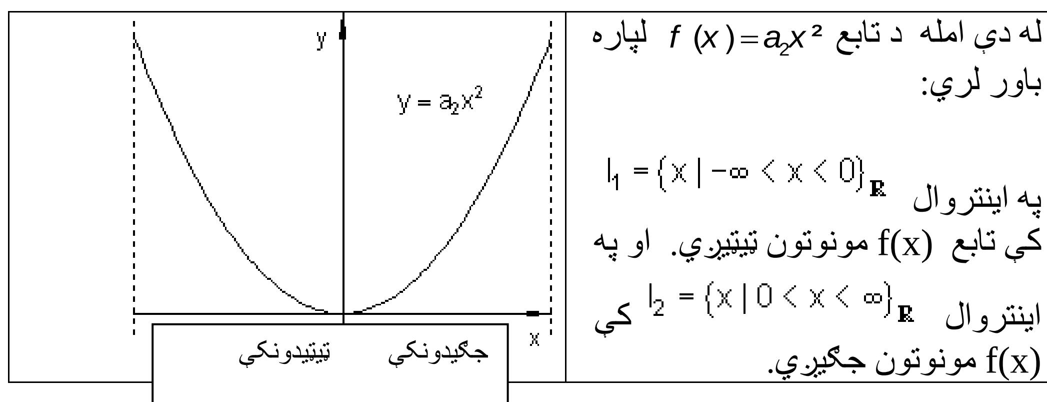
یوغږیزوالی (یکنواخت) Monotony جګټیتوالی، د جګټیتوالی جملې

دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل $a_1 = \tan(\alpha)$، دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د x -محور ترمنځ زاویه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت میل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	کرښه د مثبت جګوالي
که $0 < \alpha < 90^0$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګیږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګیږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې($\Leftrightarrow$ $a_1 < 0$ (	کرښه د منفي جګوالي سره داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټیږي یا لویږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیزو او له یوه مونوتون جګېدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اينسول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اينتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټيټيږي. او په اينتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې $f(x)$ مونوتون جګيږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له يوه ټکې څخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګيږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د$f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: د$f(x)$ تابع دې په اينتروال Iکې مشتقوړ وي.

١ که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که $f(x)$ په اينتروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

---

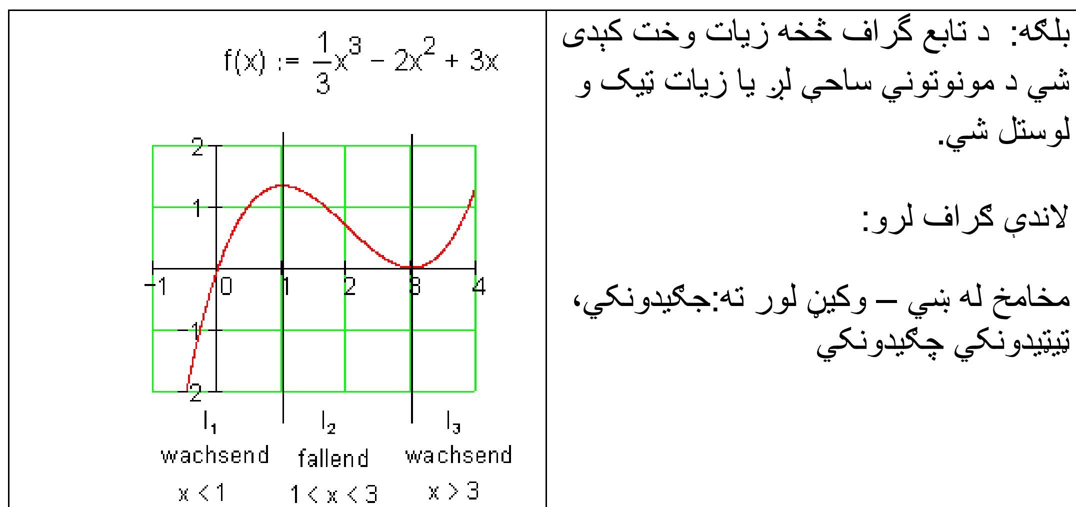
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینتروال I کې مونوتون جګیدونکې ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایترولIال کې مونوتون ټيټيږدونکې ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون جګيدونکې ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټيدونې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحو) تاکنه:

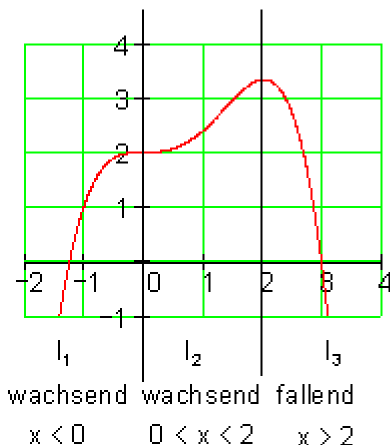


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټيټېدونکې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکي ده.

.



بیلګه:

پورته له ښي – وکيڼ لور ته: جګيدونکي، جګيدونکي، ټيټيدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$په کلکه مونوتونجګېدونکې ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

يادونه: که په ليکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که د(f(x) لپاره د x_0په ځاي کی f' (x)=0او f''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

گراف: که ګراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعني دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کی د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښۍ لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښۍ کوږ یا ښۍ انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بیلګې څیره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښۍ کوږ دی(ښۍ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کيڼ ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوړوالی(ښیٔ انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دیٔ. د های پارابول کومه څانګه کینه کړه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوړوالی - یا ښیٔ انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دیٔ.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دیٔ. د های بارابول څانګه ښی کوړوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوړ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

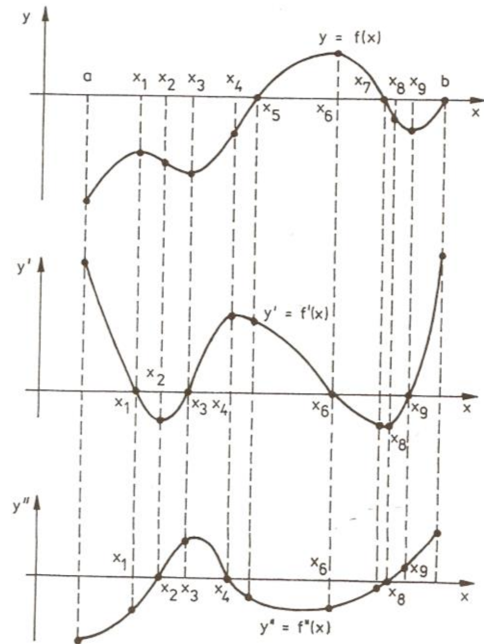
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کیڼه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کیڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موږ له
پورته څیرې اټکل کولی شو چې : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو يو کيڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کيڼ - او که کيڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه يی ټاکي.

۴ - شرايط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره يواځی اړيين ياضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرايط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کيدونکي دي.

ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی يو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

ګورو چي دريم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

.

د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسيږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولړی. د کینې منحني(د کېن لورې د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.	A ښی انحنا B L کینه انحنا

د کینې- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لورې و ښی لورې ته. دا د کینې او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تېږېږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بېرته کمیږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	غر Tal دره
د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه یې رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چې له سره بېرته جګه شي. ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتآهواره).ٚ دې نسبتآ هوار ځای کې د ټوټه کربښي جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	Steigung nimmt ab Plateau Steigung nimmt zu له کېن و ښي لور ته: جګیدنه کمیږي، هواره ، جګیدنه زیاتیږي

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسي ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملی د بحراني(جګ – ټيټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پيژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال $x = x0$ کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمې نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په $x0$ کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لرې نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایې (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د $x0$ ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره$f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x = x0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري (یادونه ۴ ډې پرتله شي): چیرته چې $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چې اوړونټکي موجود وي. مګرچیرته چې $f''(x)=0$ وي ، اوړونټکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

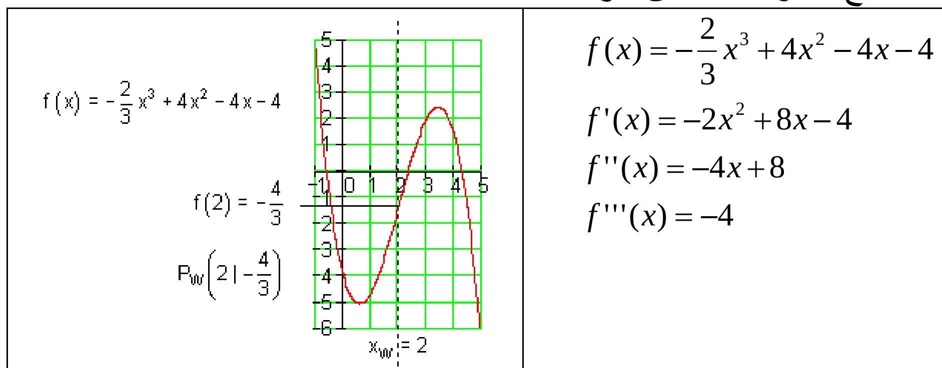
له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x0 =کې دریوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x)=0$, او $f'''(x)\neq 0$ نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

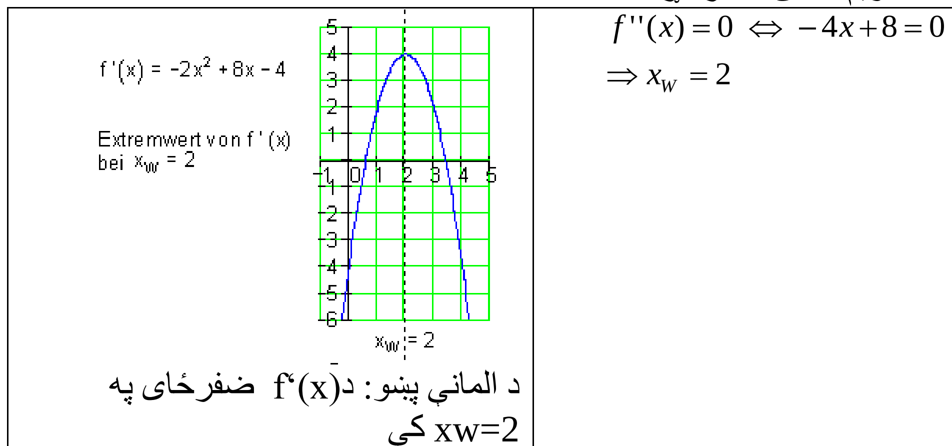
شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره

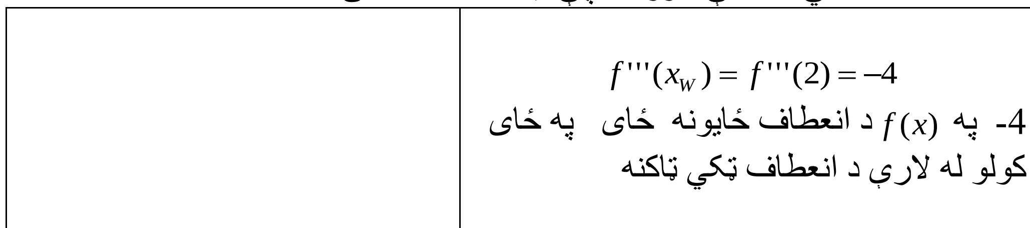


۲- دویم مشتق صفر کړئ.

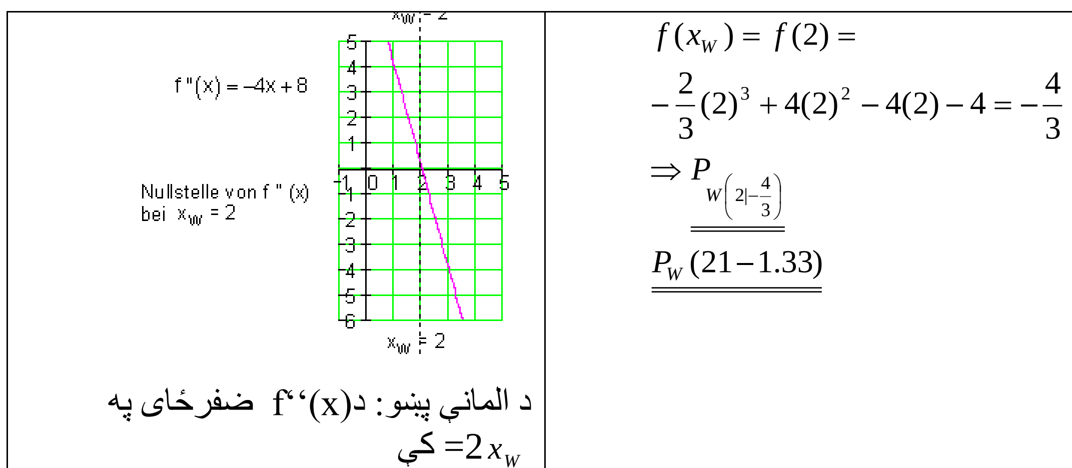


$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W=2$	د الماني پښو: د$f'(x)$ ضفرځای په $xw=2$ کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟



$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه	

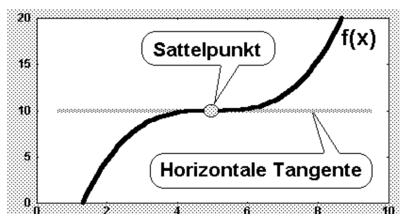


$f(x_W)=f(2)=$ $-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2\mid-\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$	د الماني پښو: د$f''(x)$ ضفرځای په $x_W=2$ کې

پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږيږي.

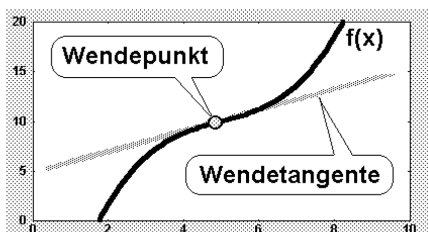
په يوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږيږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږيږي(انحنا کوي)
يو زينټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

پيزند: د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت)

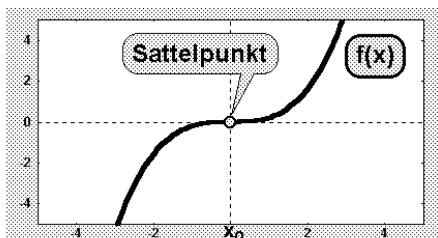


وي:

د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

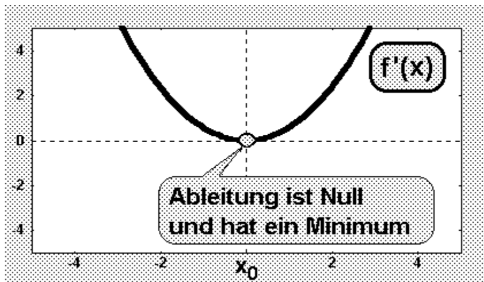


توضيح: اوس فکر کوو، چې يو زينټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له ښي ـــو کينه انحنا و شمېرو.



د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



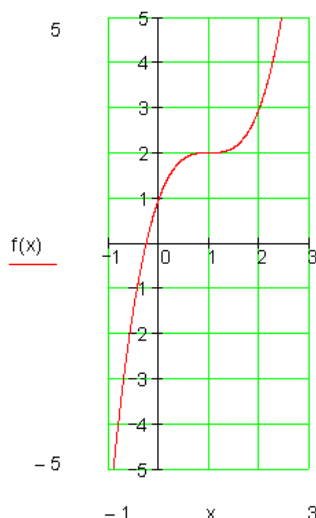
د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکې قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د گرانو دوستانو وړاندیز)
؟
\.
،

زینتکی **Der Sattelpunkt**



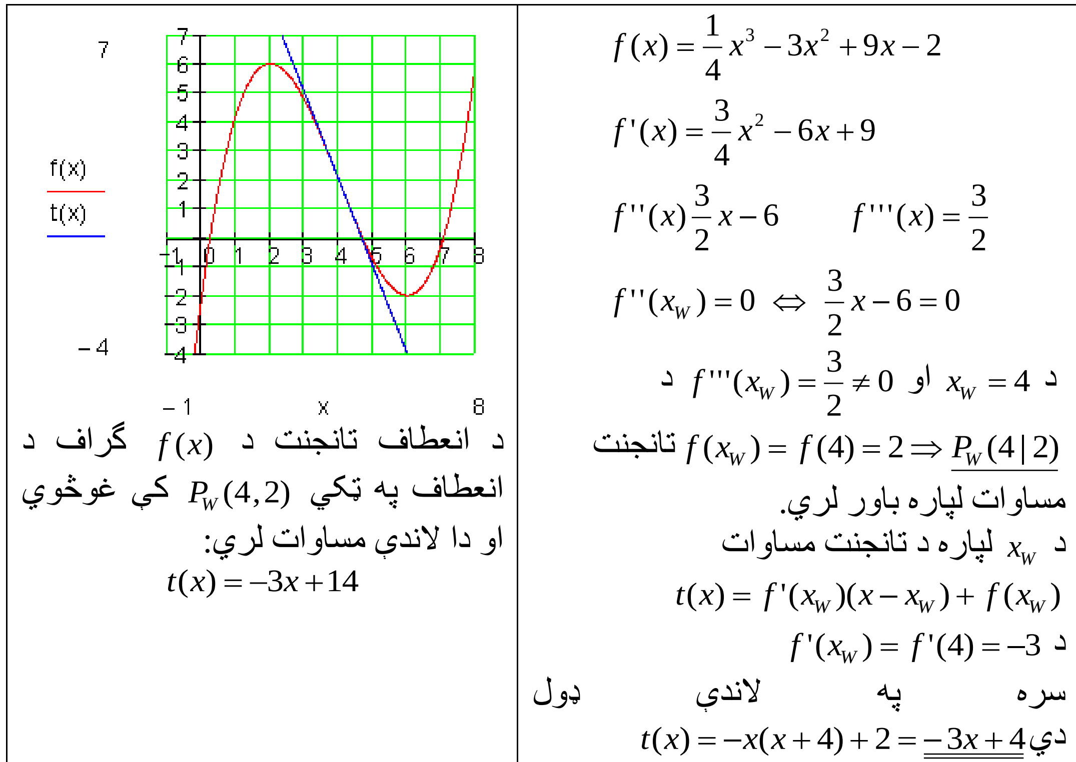
د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګيدني سره.که د کيڼ لور ورنږدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې ځيړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کيږي.
.
.
،
.
.



$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x - 6 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

د $x_W = 4$ او $f'''(x_W) = \frac{3}{2} \neq 0$ د

تانجنت $f(x_W) = f(4) = 2 \Rightarrow P_W(4|2)$
مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_W)(x - x_W) + f(x_W)$$

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$
سره په لاندې ډول
دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = -3x + 4$

د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x) = -3x + 14$$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کیږي.

د کږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کینې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کینې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې يوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحنې بحث وايو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې بايد سيستماتيک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعريف ساحه: د تابع څېړنه يواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : بايد وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.

يه ټوليزه توګه كه ټول ريل تابع په پام كې ونيسو، نو ګورو چې كه توان(د پولينوم درجه)يې جفت(جوړه) وي، نو پولينوم محوري متناظر دی او كه توان(د پولينوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولينوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټيټټکی)

د جګټکی يا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی يا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زينټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زينټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):

د x – محور سرهِ غوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$

د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $\Rightarrow$ $P_y(0 \mid y_s)$

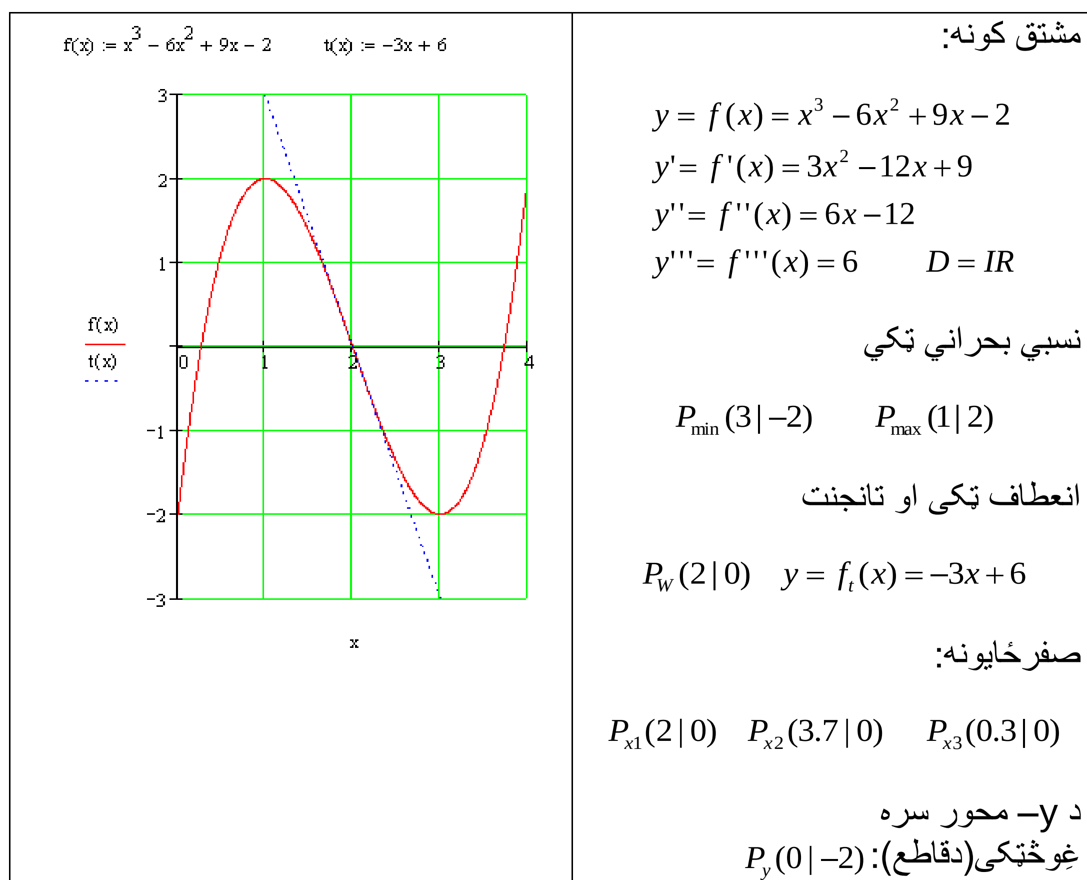
دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځورېږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کیڼه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جگیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.
2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروالI کې کره غښتلي مونوتون جگېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلي مونوتون جگېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

.
.
.
.



مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د $y-$ محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

یوغږیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی)	د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې
په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$
په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$
	سیومتري: نه لري

د کږوالي يا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کيڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټيټ ټکو جملې يعني دا وروستي نومولی جملی اوس بايد په يو لړ بيلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پيژند سټ (- ډيری)، انعطافټکي ، جګ-ټيټټکي (اکستريموم، قطبونه، اسيومپټوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو يا څيړنو ته د کږو خبرې اترې يا – مباحثه ويل کيږي، يعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خويونو غږيږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستريموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو يا روښانو څيرنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شيما له لارې مخ ته بيايو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع (y = f (x د دريمي درجی پورې مشتق پيدا کيږي، بيا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړيږي (۴ ټکی) چی وروسته بايد ځانګړې تر څيړنی لاندې ونيول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅيز يا پراته ارزښتونه نيول کيږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بيا تشځايونه (لوکی Lücke نيمګړتيا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکميل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځايونو xi سټ M0 لټول کيږي.

۲ – ټول ځايونه x لټول کيږي، چی هلته (y = f (x د مشتق قابليت نه لري او په ډيری Mکی يی نيسي. بيا د ټولو ارزښتونو xj ډيری M1 لټول کيږي، چيرته چی f' (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د (yj = f (xj تابع

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M په‌سټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اا‌عطافتکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافتکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافتکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M څیړنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x^3- 6x^2 + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - \ f (x) = 3x^2 - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, \ \ f \ \ (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $: M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f (x) = x^3 - 6x^2 +9x = x (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2 \} = \{ 0 , 3 \}.$$

---

2 - $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$M1 = \{x3, x4\} = \{1, 3\}$, $y3 = 4$, $y4 = 0$

میڼیموم $f''(x3) = f(1) = -6 < 0$, Minimum (

) ماکسیموم $f''(x4) = f(3) = 6 > 0$, maximum (

$M11 = \{1\}$, $M12 = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 6x - 12 = 0$,

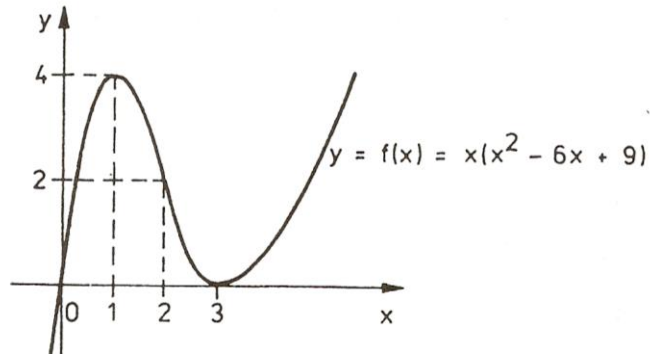
$M2 = \{x5\} = \{2\}$, $y5 = 2$

$f'''(x5) = f'''(2) = 6 > 0$ (

ښی - کيڼ اوړیدونټکی .$M22 = \{2\}$

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بېلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

$0 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f'''(x) = 24x - 24$

په سټ M يواځې $-\infty, \infty$ نيول کيږي: $M = \{-\infty, \infty\}$

$1 - \quad f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$

$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 4\}$.

$2 - \quad f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$

$M_1 = \{x_3\} = \{3\}$, $y_3 = -27$

دا چې د $x = 0$ لپاره دويم مشتق $f''(0) = 0$ دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څېړل کيږي

$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0$, Minimum, $M_{12} = \{3\}$.

$3 - \quad f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$

$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0, 2\}$, $y_4 = 0$, $y_5 = -16$,

$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$

انعطاټکی(کېن- ښی -انعطاټکی $M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$,

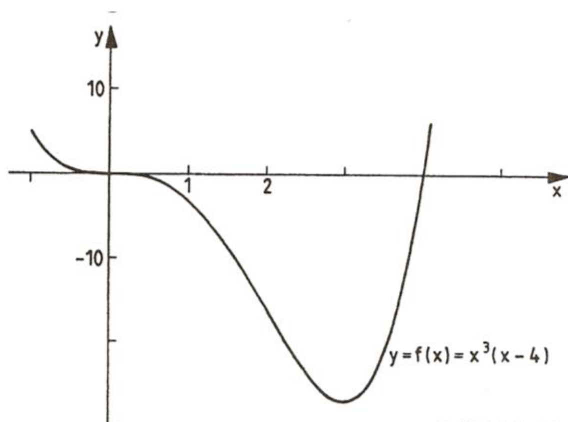
$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0$,

انعطافټکی(ښی - کېن – انعطافټکی)

$M_{22} = \{x_5\} = 2$.

$4 - \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

د لاندې څیرې څخه د کړې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3}(3x^3 + 2) + 6e^{x^3}(6x^3 + 1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0 \qquad ۲ -$$

یواځې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دی ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې څیرل کیږي

۳ –

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \ y_2 = 1, \ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنـي – کينږ انعطافټکي:

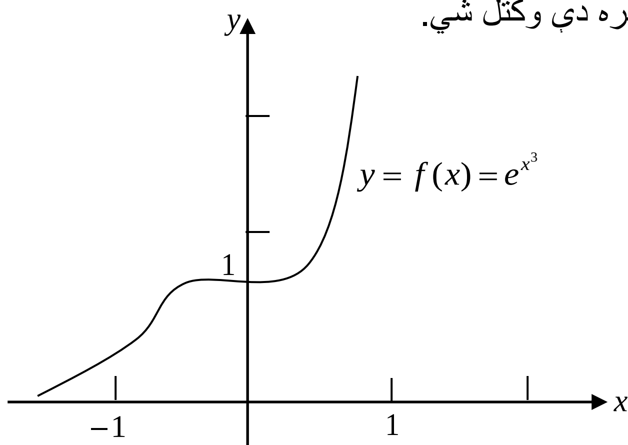
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کينږ- بنـۍ انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\, e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$ - ۴

لاندې ځېره دې وکتل شي.



بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یوائي د x |= 0$x \neq 0$لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته f'''(x) ته اړتیا نه پېښیږي

د M سټ له x = ± oe او x = 0 څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\ \frac{8}{27x}=-1,\ x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3 = f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شووني نه ده.

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

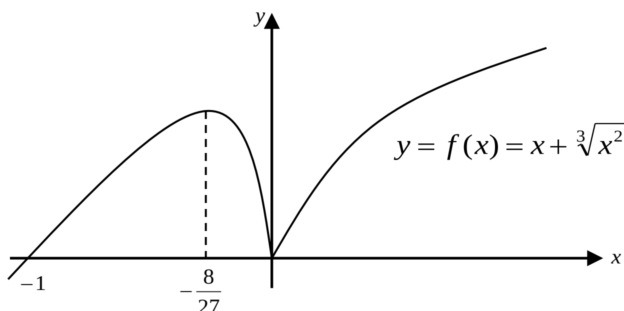
هغه ځاي$x1 = 0$ ، دکوم لپاره چی $f(x)$ مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی $f(0) = 0$لرو، باید تر اوس تر څیرني لاندې ونیول شي

د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق کوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(
⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي ټيټټکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په سټ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=...=0$$

په M کی یواځي د ابسڅیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

$$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$$

$$2 \quad f'(x) = 4x + 1 = 0$$

$$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\,4\sqrt[3]{4}. = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$$

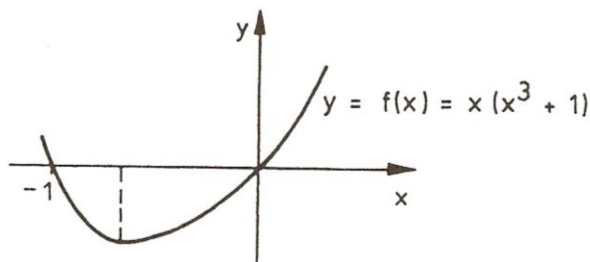
$$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$4 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

د x=0 سره هیڅ اوړونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوړونټکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(وپینو) حدونه یا پولې

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو ليدل، چې د داسې توابعو حد پيداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايې، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، يعنې د کمښتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کيدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نيولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وايو.

پيل خيرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

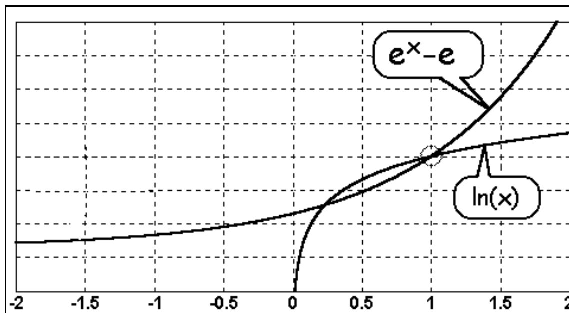
که پوله ارزښت جوړېدو کې يو کسر پيدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بيلګه: لاندې د الماني ښتو: صورت يا ماتباندې، مخرج يا ماتلاندې

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په خيره کې برخه توابع رسم شوي دي، يعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



لیکندود(لیکنډول): د افادې
$$\frac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$$

----

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x=1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

د برنولي او د دېٖ لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کيدی شي چی د ويش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅيړل شي، په کومو کی چی صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2ولري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شميرل کيدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتيجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دېٖ لو، پيتال قاعده :

که توابع u=f(x) او v=g(x) د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د سره او $g'(x)\neq0$ د تولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g يوصفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل: تابع د پراخه شوي منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz} = g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جگعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توگه جگیږي، نسبت لوگاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې ∞-∞ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچې دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره ښایي. په کوم کې چې ضرب د ویش په ځیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځیرنی لاندې نیول کیږي.

د بڼي بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ $x \in R^+$ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^{\mu}$$

د $\mu=1$ له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا تې: شي

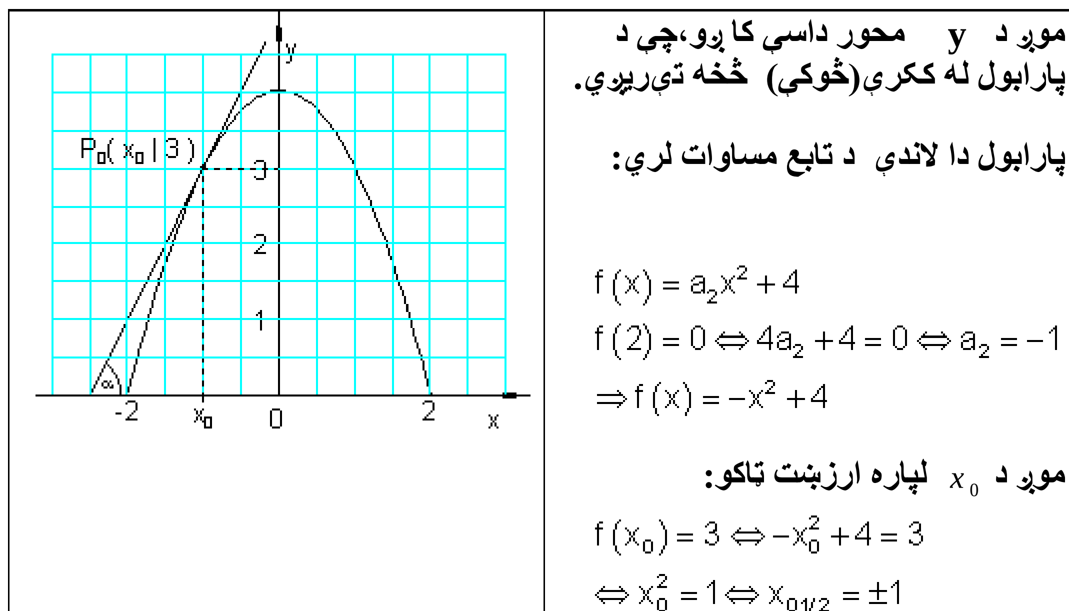
لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښویا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.	0 0	0 1 0	∞

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

له ځمکې څخه د وښو په ټوپی یوه زینه اینښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپۍ لم د وښو ټوپی دې د یوه کیښکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري.
غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زینه کینښول شي؟

Leiter
Berührungspunkt
P_0
1m
3m
Heuhaufen
α
x
4 m



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپې په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کي لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څیړني لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$له لارې څرګندولې شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی (f(x مینیمال یا خورا کم شي.

که په ځبې یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې (f(x ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځموږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د موداليتيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د يوې ځلور ضلَي(څلورګوړی) پيداکول دي. لکه چی معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوړی) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ بي په b ښايو، د څيرې ۲۰ . ۱۴ له مخی) .

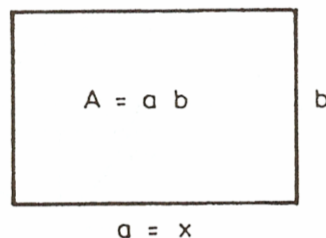
دا په سر کی دوه اغيزې لرونکي يا تاثيراچونکی لويي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چی صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د ستري ګټی پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x) = Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. $a = b = L /4$

بیلګه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډېری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي.
دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لړه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي.
مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه ایښول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M څخه نه شي ستریدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

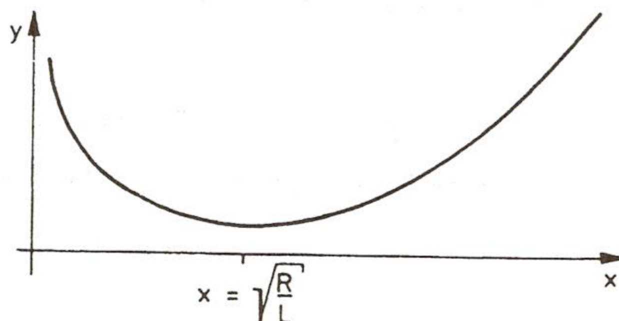
$$y = f(x) = F + Lx + R /x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

(لمړی $f(x)$) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f '(x) = L -R/x^2 , \qquad f ''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f '(x) = 0$, پس لرو $x = \quad R / L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کربږ تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې تول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتوالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 <$ $M^2L = 108 . 10 = 109$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $10 = 100 =$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

ځنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډیری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منحنی لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منحنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

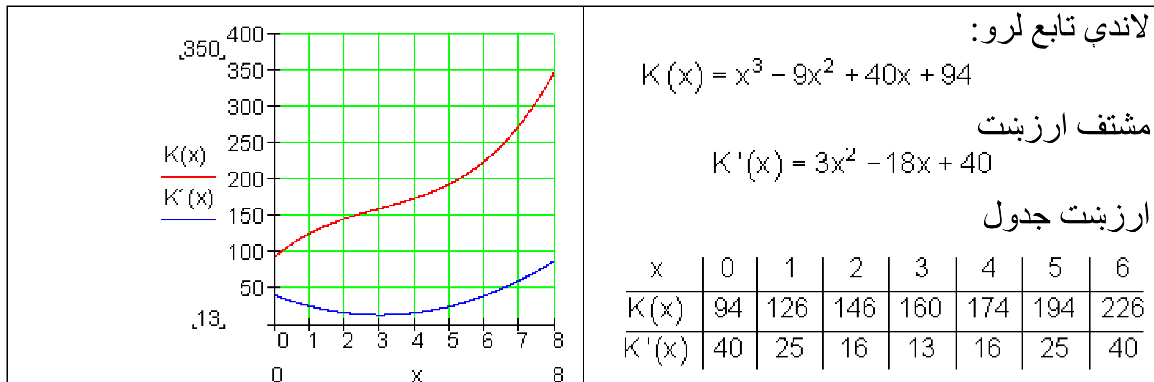
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت **K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت **K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډیر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:


لاندي تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چي تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

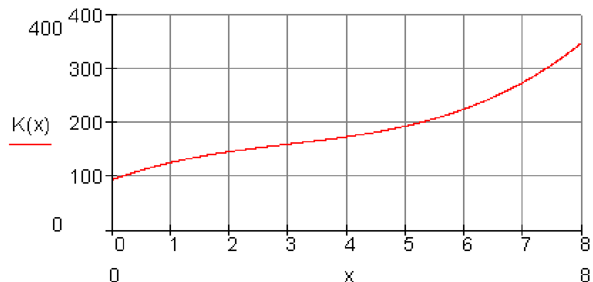
د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چي ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږی او په نږدې توګه یې ماګسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.

- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړېکي انځوروي، داسي چي x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چي 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



--- ---------------------------------

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو

ښې‌ره په نوټ کي ده، دا بنه نه ده کېنبل شوي

هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضيه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اینټروال Iکې مونوتون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اینټروال کې همغږیزټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغږیز جګېدونکي ده.

- که$f'(x) \leq 0$ وي د ټولو$x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروالI کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که$f'(x) > 0$ وي ، د ټولو$x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که$f'(x) < 0$ وي د ټولو$x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپېریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:

$\mathrm{f}(\mathrm{x}) > \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$ په همدې ډول $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\neq 0$, $f'(x)=0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پيژند: په يوه چاپيرپال $x=x_0$ کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدي ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y=f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x)=0$

پیزند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ ســـره او د ټولـــو $x \in U(x)$ لپـــاره او x_0 د f او g یوصـــفرځاي وي، د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x - 1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځوني د تن درونډټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل)

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوي دئ

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دئ

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدئ(د بیلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړئ.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي جټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسئ! پام وکړئ، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړئ شي

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسئ، او هغه ارزښتونه ترې وباسئ، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

---

۵ . ۱ –

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ –

a) $y = \sqrt{x}\sin x$

b) $y = 2\sin x \cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3 \cos x$

e) $y = 2\sin x(x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ –

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ –

a) $y = \frac{\ln x}{x}$

b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$

d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$

b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$

d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$

d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$

b) $y = (1 - x^4)^5$

c) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8$

d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{1 - 2x}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$

b) $y = \sin^2 x$

c) $y = \sin \sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$

e) $y = \cos \frac{1}{1+x}$

f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1 - 3x)$

h) $y = \cot\sqrt{1 - 2x}$

i) $y = \sqrt{\tan x}$

j) $y=\frac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y=\left(3+\frac{2}{\cos^2 x}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y=\left(\frac{3}{\sin x}-5\right)\frac{1}{\sin x}$

n) $y=\tan\sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$ o) $y=2\sin\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ p) $y=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

۵ . ۱۰ -

a) $y=\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a}$ b) $y=\operatorname{Arccos}\frac{a-x}{a}$ c) $y=\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$

d) $y=\operatorname{Arccos}\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$ f) $y=\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g) $y=\operatorname{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y=\operatorname{Arctan}\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=\operatorname{Arccot}\frac{1+x}{1-x}$

j) $y=\operatorname{Arcsin} 2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y=\operatorname{Arctan}\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y=a\cdot\operatorname{Arc}\cos\frac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

۵ . ۱۱ –

g) $y=\frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y=\sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y=\frac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

۵ . ۱۲ -

a) $y=\ln 2x$ b) $y=\ln x^2$ c) $y=(\ln x)^2$

d) $y=\ln\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{\ln x}$ f) $y=\ln\sqrt{1-x}$

g) $y=\ln\tan x$ h) $y=\ln\ln x$ i) $y=\ln\cot\frac{x}{2}$

.

j) $y = \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln\sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^3 x}$

q) $y = \ln\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln|x|$

d) $y = \sqrt{|\ln\cos x|}$ e) $y = \ln|\ln|x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = \left(x^x\right)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x\cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\mathrm{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2-\sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

---

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x \cdot |3-x|$
d) $y = \frac{x^2-3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ! و ازمايې، چې ايا د مشتق قابليت کې د يو ګونو ورشو ګانوو يا ساحو کې تغير راځي!

د -م مشتق لپاره يو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$
d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$
g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$
j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$
m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$
p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \text{Arcsin } x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کيږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$
c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

----

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو y=f(x) په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx /dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\, e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty), a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحليلي افادي په متماديت او مشتق والي باندې و څیړئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \leq 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

---

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقااط افراطي و انعطاف) له مخې وځېړی.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8-x)$

d) $y = (x-a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2+1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x \ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\, x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$
b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$
d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x(x+3)^2$
f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$
h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$
j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$
l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$
b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$
d) $y = (x-2)^2 (x-4)(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24} x(x-1)(x-2)(x-3)$
f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$
h) $y = (x+2)^2 (x-1)^3$
i) $y = x^2 (x^2 - 1)^2$
j) $y = (x-4)^4 (x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$
b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$
c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x + x^2 + 25}{1 + x^2 + 2x}$
e) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$
f) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$
h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$
i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3 + 2}{2x}$
k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$
m) $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$
n) $y = \frac{5(3x^2 - 4) - 13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x - x^2}$
b) $y = x^2 \sqrt{25 - x^2}$
c) $y = x\sqrt{14 + 8x - x^2}$
d) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$
e) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} - 2$
g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$
h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x\,e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)\,e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2\,e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(څلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \qquad I$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad II$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad III$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad V$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad IV$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د $B = 3$ په V کې اینسوونه: $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې اینسوونه: $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې اینسوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) ضریبونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کربنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربنودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره دبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضريبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه يې د IV سره : A = 2

د A = 2 اينبوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اينبونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:
که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کښنول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

د $\frac{c}{x+1}$ بنې کسر سره یوځاې مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضریبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

A − 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په I ائښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ایښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا په پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – يا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضريبونو ټوټه کړی:

د مساوات x² - 2x -8 = 0 لە پارە حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټە کسر ټوټە کونې لپارە ځای پە ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې لە لارې د ټوټە کسرونو جمعە کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضریبونو د پرتلە کوونې پە مرستە د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$

$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب لە 2 سره او لە II څخە یې تفریق یا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

پە II کې اېښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس تە راوړنە $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) پە ټوټە کسر ټوټە کونە لاندې بڼە غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

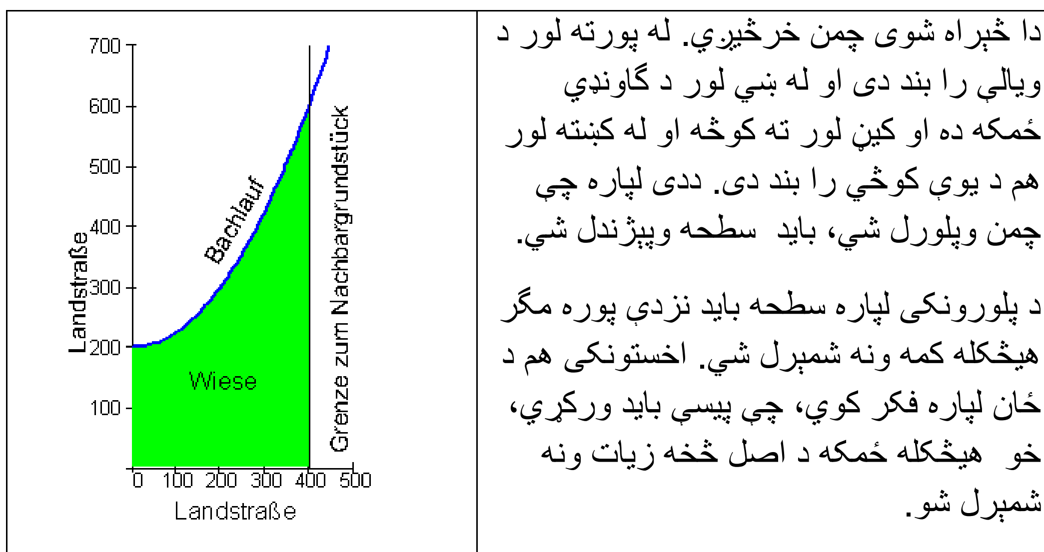
د انتيګرالشميرنه

د انتيګرالشميرني لپاره پيل راوړنې

موږ د ځمککچپوهني يا هندسي له لارې بلد يو چې د کرښو رابند تنونو يا جسمونوسطحه او ډکی يا حجم څنګه وشميرو.
که يوه سطحه له ګرږط(-کرښې) رابنده وي، نو څه بايد وشي؟
دا مو انتيګرال شمېرنې ته رابولې.

A = ?	پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي کې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيخ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

پيلبيلګه



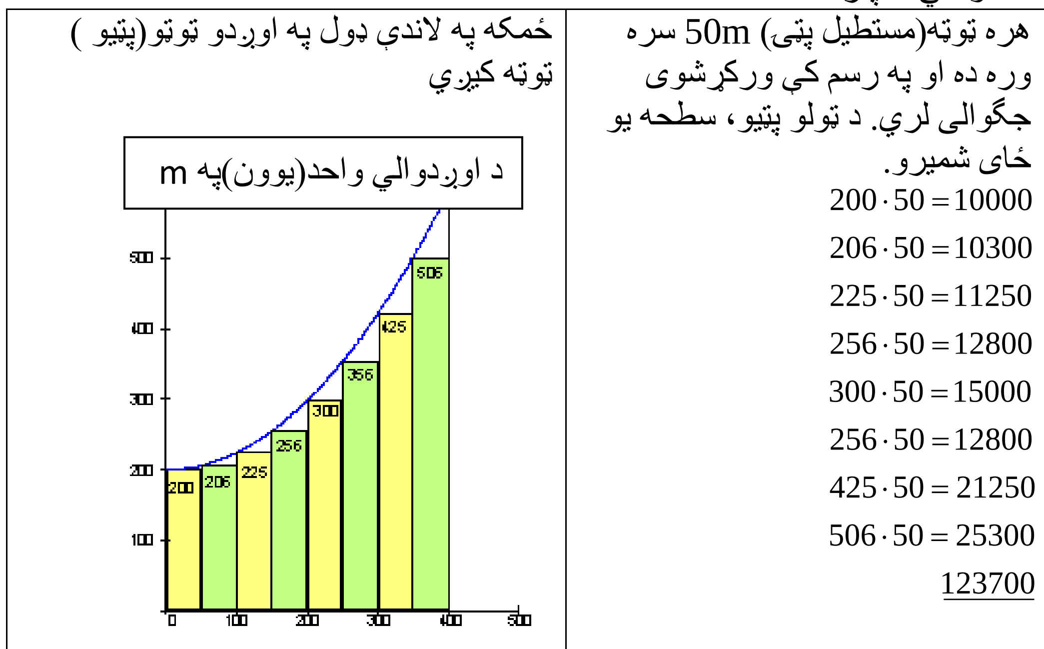
دا ځيراه شوی چمن خرځيږي. له پورته لور د ويالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کيڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د يوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، بايد سطحه وپيژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه بايد نزدې پوره مګر هيڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پيسې بايد ورکړي، خو هيڅکله ځمکه د اصل څخه زيات ونه شمېرل شو.

وروسته له دې چې رانيوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پيسو په تاديه سره يوځای کيږي او په دې هکله موافقه کوي.

ويالی $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.



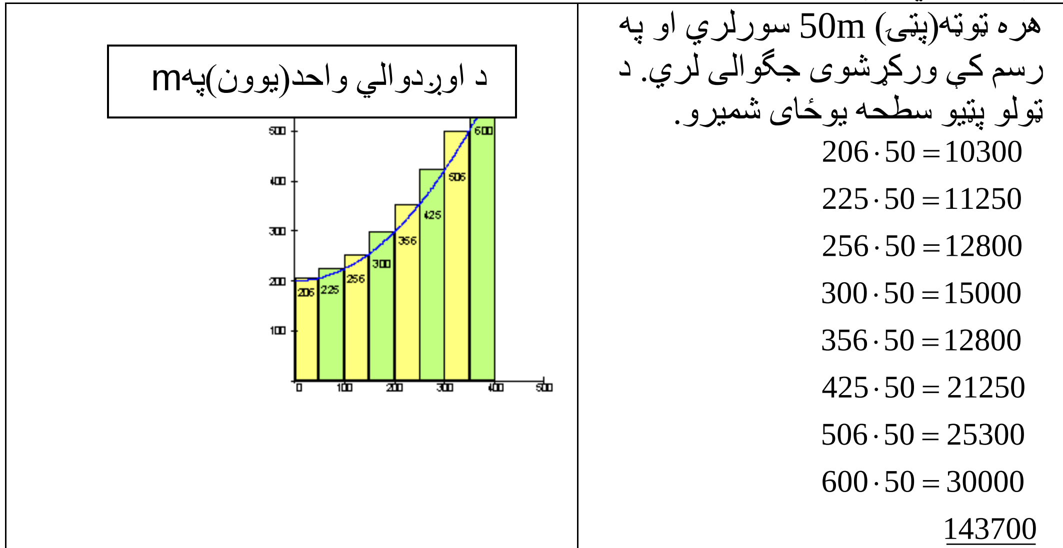
هره توټه(مستطيل پټی) سره 50m وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټيو، سطحه يو ځای شميرو.

$$200\cdot50=10000$$
$$206\cdot50=10300$$
$$225\cdot50=11250$$
$$256\cdot50=12800$$
$$300\cdot50=15000$$
$$256\cdot50=12800$$
$$425\cdot50=21250$$
$$506\cdot50=25300$$
$$\underline{123700}$$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټيو) توټه کيږي

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:



هره ټوټه(پټۍ) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2} = 133700 unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیږرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنی ،،جمعي جوړول،،** بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي،، جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

د سطحي تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتېزي وضعیه قېمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کرښه رسموو.
غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي(د x تابع وي).

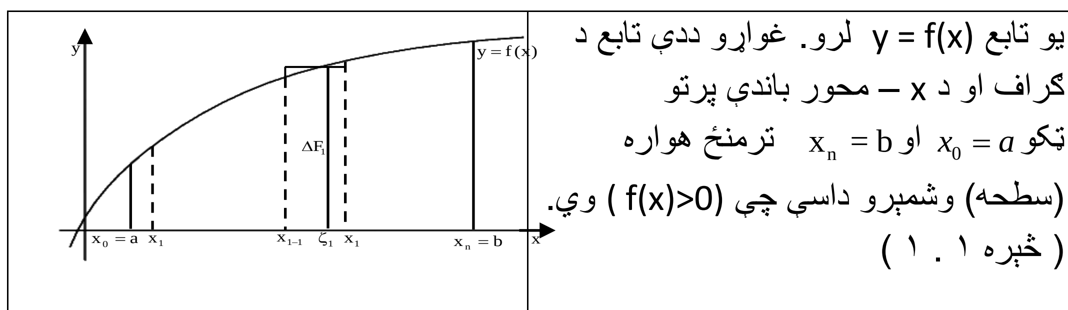
د ریمن (ټاکلی) انتلګرال

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردئ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردئ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:
لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښنخ لري.
تحلیلي تعریف:
تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کليمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې يا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنيول د مشتق په څټ يا برعکس کارونه يا عمليه ده.



يو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $f(x)>0$ وي. (څېره ۱ . ۱)

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينتروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} x_i < \ldots < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i (x) = f\ (\xi_l).\Delta x_i\ , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغې ښه کیږي خومره چې د انټروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال [a , b]څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیت (پوله)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکې لاندې(کښته)پوله یا حد او b د اینیګرال کېدونکې پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د اینیګرال کېدونکې اینتروال او((f (x) (Integrandاینتیګرالېدونکی) او dx اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

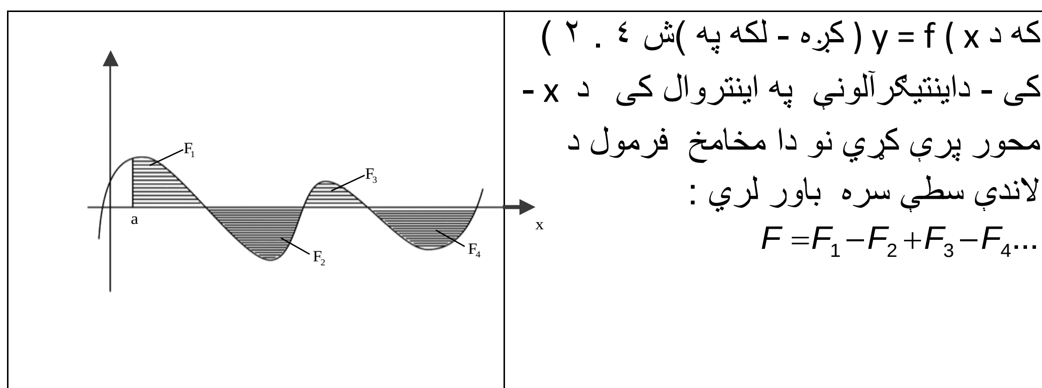
یادونه ۱ : د اینیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

يادونه ۲ : دا پورته تعريف ٤ . ۱ کيدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چيرته چی $f(x) > 0$ باوري نه وي .

که $f(x) < 0$ وي نو دا ټاکلی اينتيګرال بيا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.



که د $y = f(x)$ کږه - لکه په (ش ٤ . ۲) کی - داينتيګرآلونې په اينتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$$

د تعريف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که $f(x)$ په $[a, b]$ کې اينتيګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بايدc له اينتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، يعنې ټکي a,b او c په يوه اينتروال کی بايد پراته وي، په هغه کی چی تابع $f(x)$ اينتيګرالوړ دی.

مورږ دا لاندې تعريف(پيژند) لرو :

پيژند يا تعريف ٤ . ۲ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پيژند تعريف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټيز- يا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنيولو او اينتيګرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنۍ تابع کلمه په لاندې توګه تعريفوو:

پيژند (تعريف): تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چی F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x) بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توګه ليدل کيږي چی د يوې f (x) تابع لپاره نه يواځې يو بنسټيز تابع F (x) موجود دی، د بيلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x)=\int_a^x f(t)\ dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c\in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x)=F_a(x)+C,\ \ C\in R$$

ځواب :

ښایو چې Fa (x) دf (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د x ∈ I او x ≠ a لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned}F_a^{'}(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f\ (t)dt-\int_a^{x} f\ (t)dt\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f\ (t)dt\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f\ (\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]\end{aligned}$$

(د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی
(د متماديت له امله $f(\xi) \to f(x)$ (
= f(x)

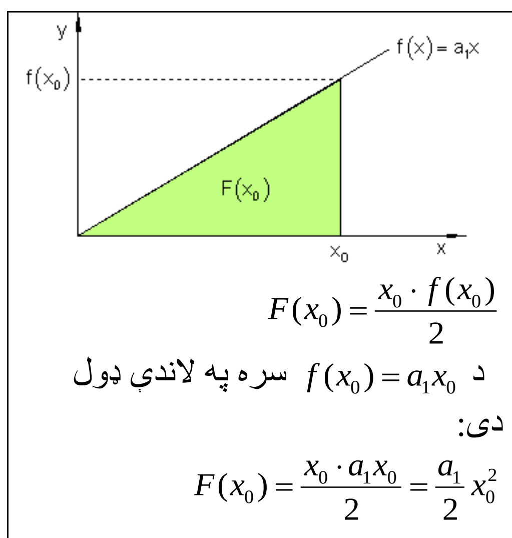
سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

<table>
<tr>
<td>

د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي.
يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A=\frac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي:
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو:
$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0)=a_1x_0$

</td>
<td>



$F(x_0)=\frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$

د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندي ډول دی:

$F(x_0)=\frac{x_0 \cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

</td>
</tr>
</table>

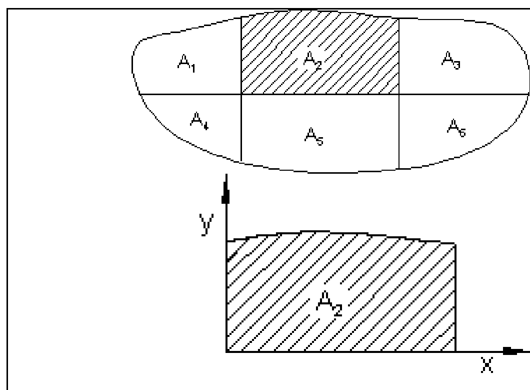
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

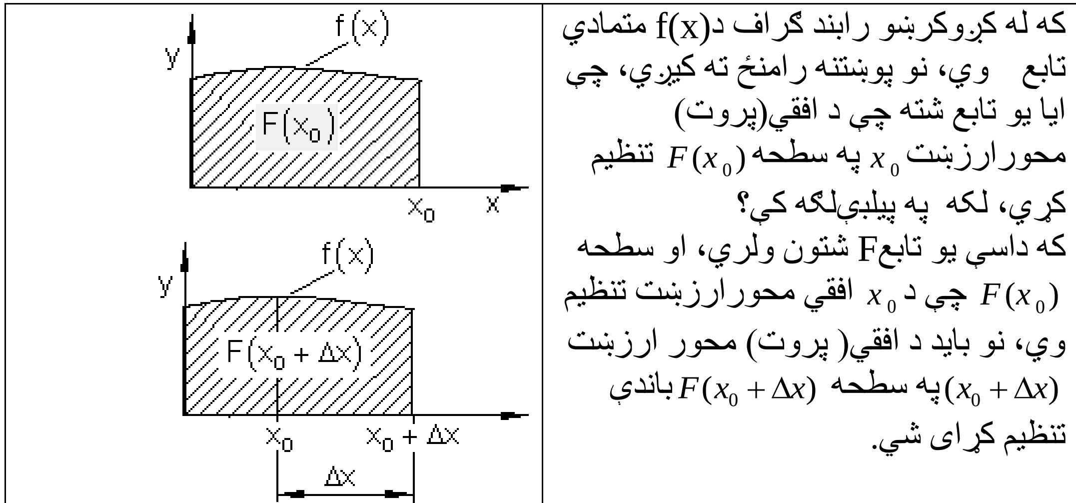
<table>
<tr>
<td>

هره له کږوکږښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي.
نورې ټولې رابندونې سيده کرښيزې دي.
هره يوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته **A2**) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

</td>
<td>

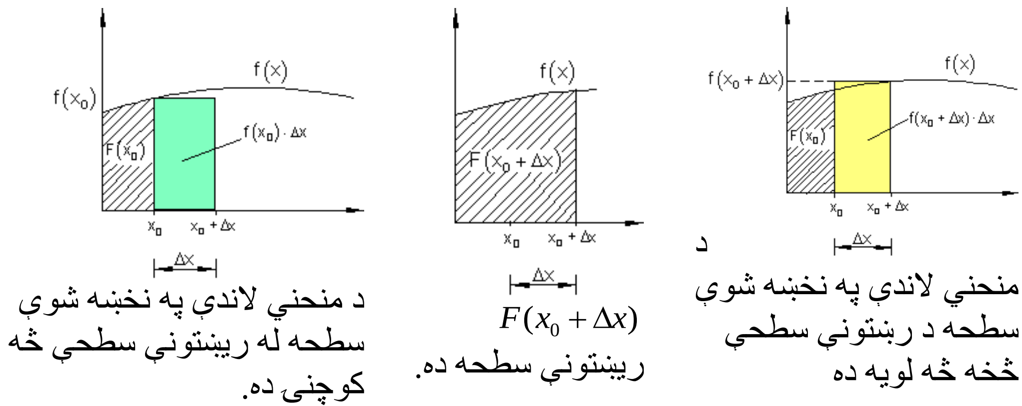


</td>
</tr>
</table>



که له کږوکږښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيلګه کې؟
که داسي يو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندي تنظيم کړای شي.

په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحي رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه څه لويه ده

$F(x_0+\Delta x)$ ريښتوني سطحه ده.

د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحي څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (يا کوچني مستطيلونه يا ولاړکوډيز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحي د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \leq F(x_0+\Delta x) \leq F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \leq F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \leq f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |: \Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ يې نیسو(پوله يې پيدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \leq F'(x_0) \leq f(x_0)$$
$$f(x_0) \leq F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت($f(x_0)$ سره
په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع $F(x)$ پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کږې $f(x)$تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سرې کړی شي فورمال ووايي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتېګرالول يې شمېرو.
د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پيداکیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیږي او پوتنښتابع د زاړه پوتنښ سره ضربیږي.
انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیږي اوپوتنښتابع په نوي اګسپوننت وېشل کیږي.
دا همدا اوس ازمایو:

پوتنښتابع:

$$f(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

ناټاکلی انتیګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، یعنې F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x) = \int f(x)\, dx$
دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلګه:
لومړنۍ تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.
قاعده داسې ده $F(x) = \int f(x)dx = \int 2x\, dx$

موږ ازمايو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټوليزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېری)

بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

بيلګه

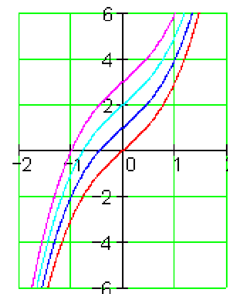
يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

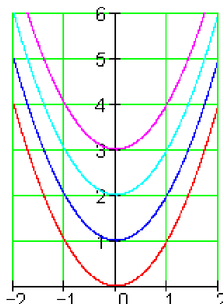
$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېری دې د منحنيو ډلې په ځېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x)=x^3+2x+C$ $\qquad$ $F(x)=x^2+C$





-- -----

انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتيګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو ليدل دواړه تمرينونه د همغه تيپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو يواځې ليکنه يې توپير لري

دويم(لاتين) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتيګرال اصلي جملې ته ګوته نيسو.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د يوې ساده بيلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرين (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی ليدونکی ګوري يا پيژني، چې د سطحې مساحت په دې بيلګه کې بې له مطلق ارزښت شميرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بيلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکميل – يا *پوره کيدنې لپاره بيلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره يوه سطحه پوره رابندوي يا راتړي. د سطحې مساحت وشميرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \;,\;\; b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځايونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشميرئ.

:

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a اوb ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6} \;,\; b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0) \;,\; B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

7 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځايونه يې وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د *f(x)* له ګراف د وضعيه سيستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دريمه څلورمه(ربع) يوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښايئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

---

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

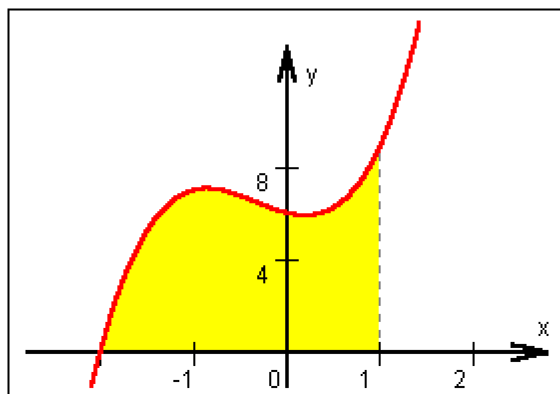
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



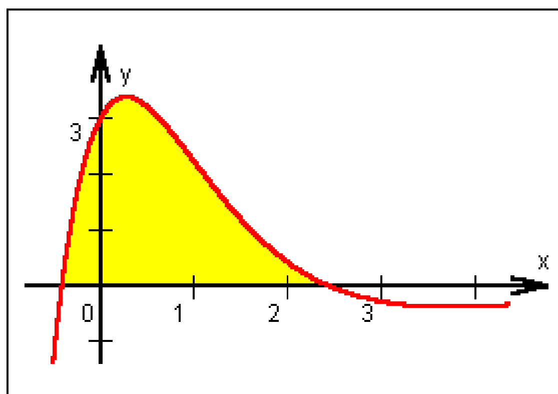
$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

----

٢ : ٢ –



$$F'(x) = f(x)$$

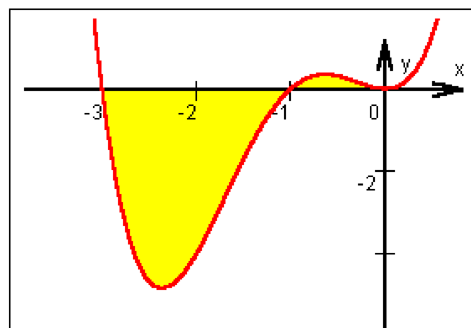
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1{,}30 - (-3{,}76)| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



٢ : ٣

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ ـ

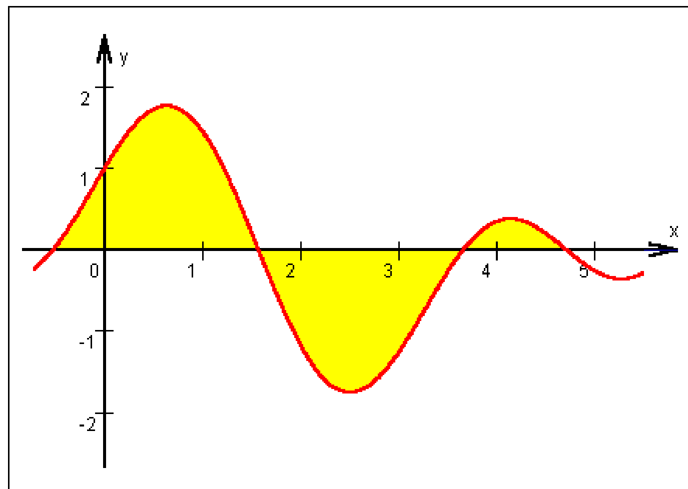
$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$

$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25FE + 2{,}25FE + 0{,}25FE = \underline{\underline{4{,}75FE}}$$

٢ . ٥ ـ

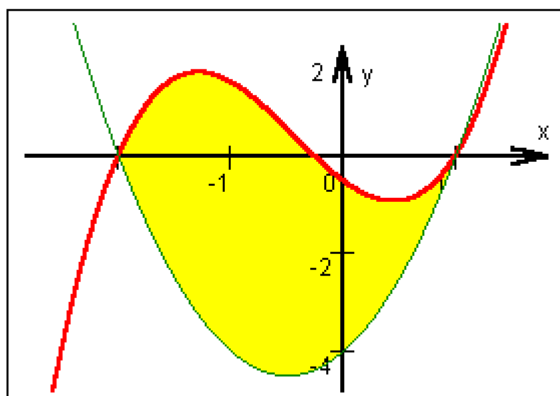
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



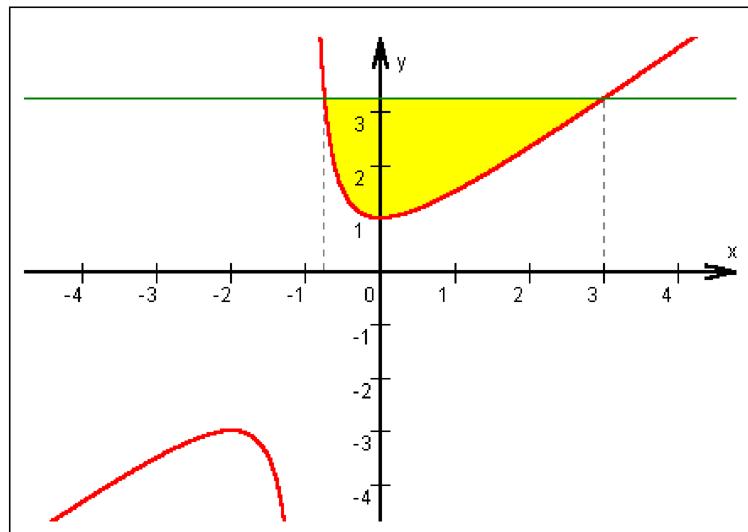
$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

$$=\left[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{4}x^3-1\tfrac{7}{8}x^2+3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$
$$=\left|1\tfrac{5}{8}-\left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right|=\underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\,FE}}$$

٢ . ٦ –

$$x+\frac{1}{x+1}=3\tfrac{1}{4}$$
$$\frac{x^2+x+1}{x+1}=3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2+x+1=3\tfrac{1}{4}x+3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2-2\tfrac{1}{4}x-2\tfrac{1}{4}=0$$
$$x_{1,2}=\tfrac{9}{8}\pm\sqrt{\tfrac{81}{64}+\tfrac{144}{64}}=\tfrac{9}{8}\pm\tfrac{15}{8}$$
$$x_1=a=-\tfrac{3}{4}$$
$$\underline{\underline{x_2=b=3}}$$



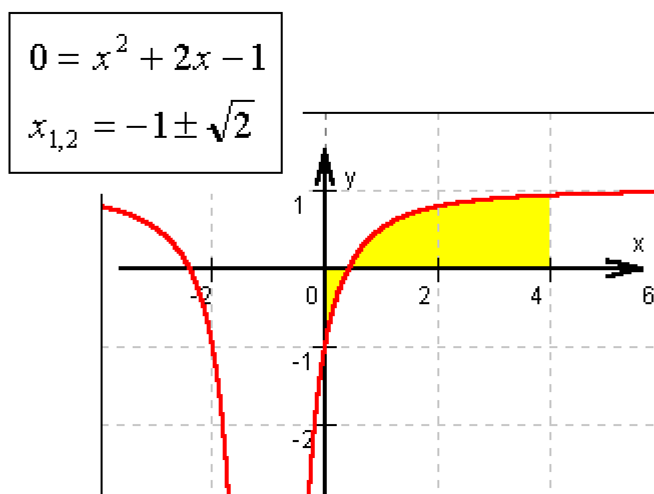
$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) \cdot dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{3} \left(3\tfrac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx$$

$$= \left[3\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx \left|3{,}86 - (-1{,}33)\right| = \underline{\underline{5{,}19\,FE}}$$

٢ . ٧ ـ



$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1} = f(x)$$

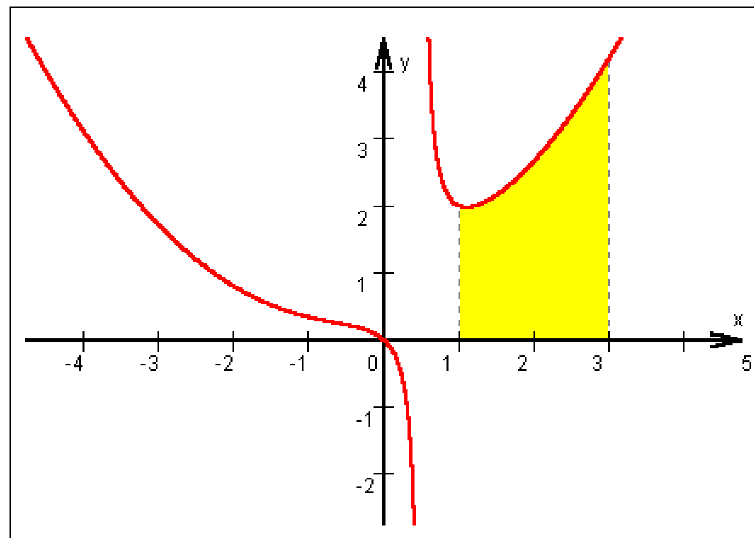
$$A = \int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$= \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$= 0{,}17\,FE + 2{,}57\,FE = \underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادى

۲ . ۸ _



$$A = \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16} + \frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$= \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16}\right)\cdot dx + \int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

$$A_1 = \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{11}{16}x\right]_1^3 = 5\,\tfrac{1}{24}\ FE$$

$$z = 32x - 16$$

$$\frac{dz}{dx} = 32 \Rightarrow dx = \tfrac{1}{32}\,dz$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz = \tfrac{11}{32}\cdot\left[\ln z\right]_{16}^{80} \approx 0{,}55\ FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5{,}59\ FE}}$$

په پورته کې *FE* د سطحې واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

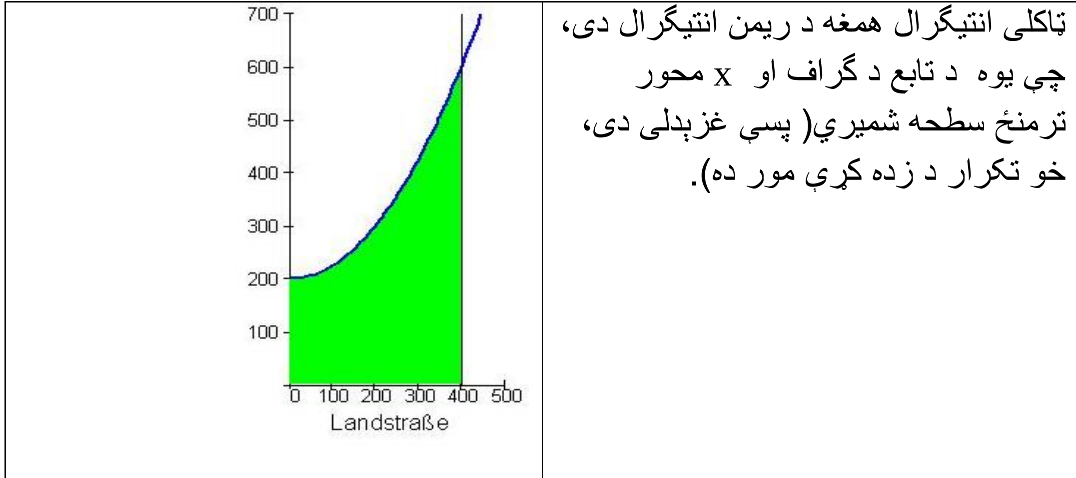
$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$	د $x \neq 0$ لپاره د $x = 0$ لپاره

نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$ د $x \to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0) = 0$ دی. او د $\forall x \neq 0$ لرو:

$f'(x) = 2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال a ≤ x ≤ b کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته   لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکي رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

یادونه : دا چي په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چي صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چي ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

مورږ ولیدل، چي ځنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چي فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

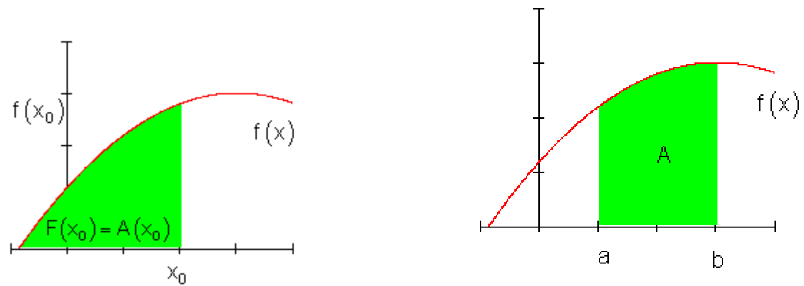
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د مشتق- او انتیګرالشمېرني ترمنځ اړیکي کېدی شي د لاندې جملي له لارې لاس ته راشي.

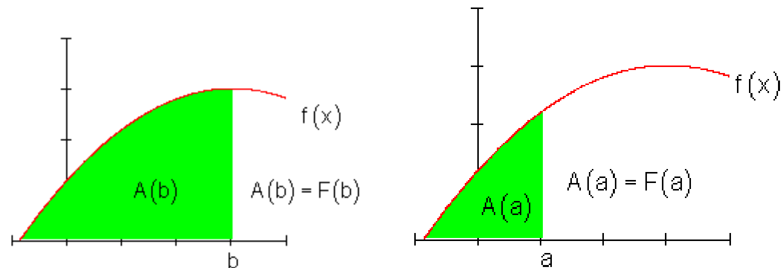
جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرني برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

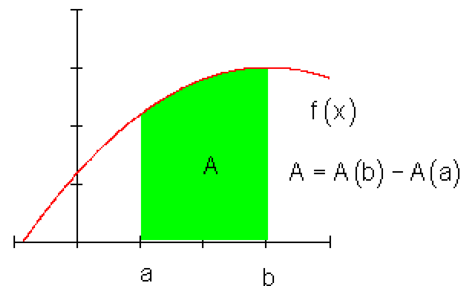
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځاى
پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت
سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکي شته دی، يعني $F'(x)=f(x)$



د انتروال $[a,b]$ حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په
ځاي $(A(b))$ b او سطحې په $(A(a))$ a ځاي کې ،، يعني
$A= A(b) – A(a)$په همدې توګه $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.



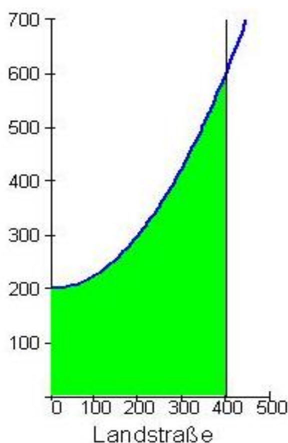
په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېړو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400}x^2 + 200\right)dx = \frac{1}{1200}x^3 + 200 \cdot x \,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200}0^3 + 200 \cdot 0\right]$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = 133333.\bar{3}$$

د انتيګرالوني قاعدې

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالوني قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدی شي زياته يا کمه وي. دا قاعده

کيدی شي چی په ټاکلي انتيګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي ايتيګرال ته نقل شي يعني په ټاکلي ايتيګرال استعمال شي . دا قاعدې کيدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نيولو سره وښول شي.

جمله :

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \qquad a \in R$$

جمله: د جمعي (تفريق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په يوه ايتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بيلګې:

لاندې ايتيګرالونه کيدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعماليدو او ساده څيره بدلون بيرته په بنستيزو اينتيګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $\int e^x dx = e^x + C \quad (a \in IR^+, a \neq 1)$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x) = \ln x (x \in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x) = \log_a x, a \in IR^+, a \neq 1)$

لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx \div \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینټیګرالونه په یوه جدول کې

د اینټیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چی د بنسټیزو اینټیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \ n \in Z$

بیلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

$$a) \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, ...1,$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \ ....3,$$

$$c) \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \ \ (x > 0), \ ....3,$$

$$d) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x \ dx = \sin x + C, \ ....(4{,}21) \ \ 6,$$

$$e) \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \qquad (4{,}11) \quad 9,$$

$$f) \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \ \ (4{,}12) \qquad 8,$$

$$g) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1 - x^2}{x(1 - x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ \ (x \neq \pm 1, \ x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h) \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \ ....5$$

بدلون قانون Substitutionlaw

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

> جمله :
>
> د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f\ (g\,(x\,))$ یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه اېښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:
>
> $$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x),$$

دا د کینې اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چې یو فاکتور زنځیري تابع [(f [g (x وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int\cos u\,du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بيلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x=u-1$ مشتق $2=du/dx$ همداسی $dx=(1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\,du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيني لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بيليدنه: $-3=du/dx\Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

$$c)\quad I=\int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int \frac{2du}{u}=2\int \frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x یوائې په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لایني ترم (Term)پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$$

بدلون:د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I=\int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\,dx,$$

$$\cos x=u,\qquad -\sin x=\frac{du}{dx}\qquad \sin x\,dx=-du,$$

$$I=-\int\frac{1}{u}du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

$$e)\ I=\int_0^1\frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3=u,\qquad -3x^2=\frac{du}{dx}\qquad x^2dx=-\frac{1}{3}du,$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$:a)\ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln|\sqrt{x}-1|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتګرالو جمعې ته بيايي، دلته

x= g(t) = (t+1)² وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بيلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعني لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

$F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$ **دی، که** $F(x)=e^{2x}+C$ **وي**

له دې امله د بدلون قانون ته اړيو:

بيلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتيګرال ونيسئ

$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$ بدلون : $u(x)=2x=u$ جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$ $\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$ د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بيلګه : وښايئ چې باور لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx$. بدلون $u(x)=x+1=u$ جوړ کړئ

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په ښت بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int (x)dx=\int (x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

و ښنايي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:
$$\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

نو لرو:
$$\int (x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بېلګه :	
وبنایاست: $f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لارې: ۱ – بدلون $u(x) = 2x$ ۲ – د dx په ځای کېږدی $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$ ۳ – د پولو بدلون - لاندې پوله $u(-1) = -2$ - پورته پوله $u(1) = 2$ ۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$	$f(x) := e^{2\cdot x}$ (graph: axis labels 1–8; −3, −2, −1, 0, 1, 2)

بېلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

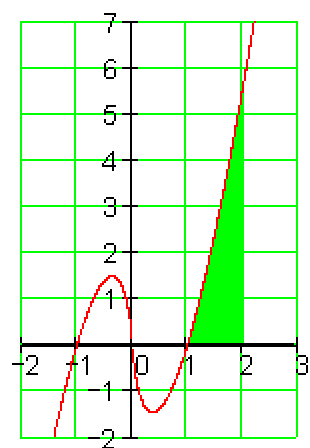
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بيلګه :

$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

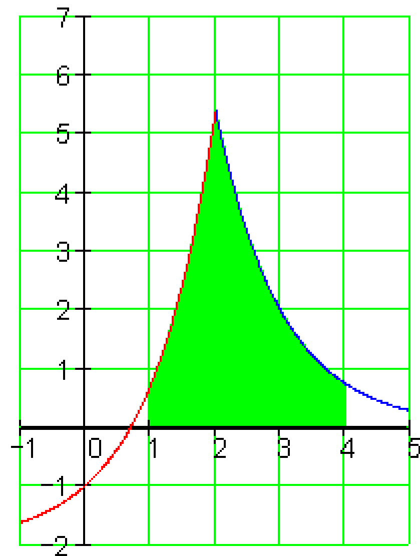
$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du\,;\,u(2)=0\,;\,u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$



ټوټه انتيګرالونه Partialy Integration

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرني د برعکسکونی په خير وکنل شي.

•

د ټوټه انتيګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقنيولو سره يو ساده تابع منځ ته راځي.
پيل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندې انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکېدونکي تابع $f(x)$ لټوو.
نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دې u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، چې د مساوات ښۍ لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x$$

که کیږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :
د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2)\, \mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:
.
.

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x \cdot (2-x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x-x^2)] + C$$

بیلګه ۳ :

که تر انتیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاې ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتوني له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" توته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

.

جمله : مورږ د دي لاندې انتيګرال نيسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

.

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونـي یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \text{ او } \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x); du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x; dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونې دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\,(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې څخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کينې لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي
او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)
له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B
-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B
-12=-28 +4B -2B |+28
+16= 2B

B=8
A= **(7-8)= -1**
ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړنې تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.
.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کوونې له لارې کیږي یا صورت نیسي.
بیلګه :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو **$x1 = -2$** او **$x2 = +3$** کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کیږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\,(x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیږي او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه یعني کیڼ لور ته له (A+B) افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګوری) :

$-5x+9 = (A+B)x\ (+3A-2B)$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$-5 = A + B$

$9 = 3A-2B$

د A او B پسې یې حل کړی:

$9 = 3(-5-B)-2B$

$9=-15\ -3B\ -2B\ |+15$

$24=-5B\ |:(-5)$

$\underline{B=-4.8}$

$\underline{A=(-5+4.8)=-0.2}$

نو لیکلی شو :

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x \to f(x)=\frac{1}{2}$$

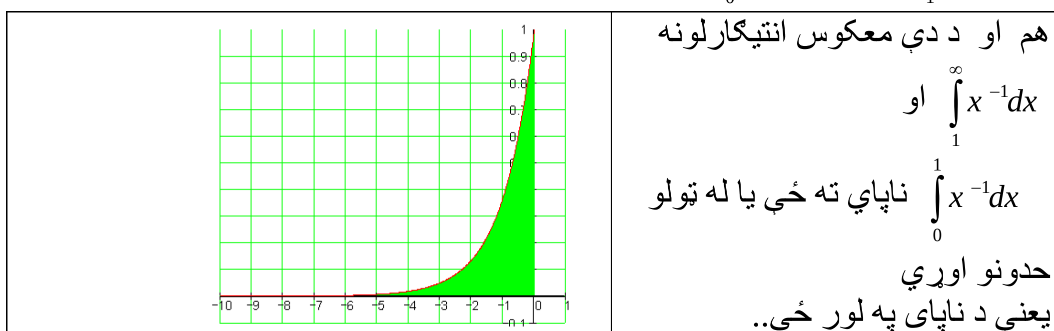
دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل كېدى شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتیګرال

تعریف : كه په يوه ټاكلي انتيګرال كې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېر تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$



هم او د دې معكوس انتيګارلونه

$\int_1^\infty x^{-1}dx$ او

$\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځي يا له ټولو

حدونو اوړي

يعني د ناپای په لور ځي..

د $f(x)=e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty;0]$ كې ټوله سطحه و شميرل شي، يعنې

.

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د يوه ټاکلي انتيګرال د پورته همداسي کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتيګرالونې ورشو ياا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې يا اوس د انتيګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتيګرال يو نامحدود انتيګرال بولو، د انتيګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتيګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په يوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتيګرال شميرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د يوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتيګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بيا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ يا $a \to \infty$ همداسې، $b \to -\infty$. يا $b \to \infty$ ، له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زمونږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}-e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

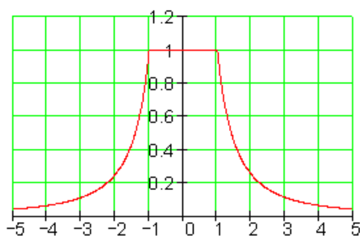
$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

د يوه يوځاي ايښول شوې يا يو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	د $x<-1$ لپاراه د $-1\leq x\ 1$ لپاره د $x>1$ لپاره

.
.
.

	د انتيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه: لاندې د انتيګرالونو تمعه دې و شميرل شي. $A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:

د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال بايد فقط يوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه

د انتيګرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحليلي تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa خخه تر b پورې د تابع د انتيګرال ښخه د x په محور د f د ګراف او د کربښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پو هيږو.

پیژند (تعریف ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالونې اینتروال او(f (Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او xد اینتیګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c\in[a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېږرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون <u>Substitution</u>

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښې)

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالبدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك $f[g(x)]$ وي

او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سرې د دننه تابع لپاره متحولې يا واريابل بدلوي يا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بريالي ايتګرالېدو(اينتيګرېشن) کيدو ورسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1)+C$$

بيلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

ومولیدل چی څنځیري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، څکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کينې لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بيليدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$ ؛ **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمایښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\ du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ځټ بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\ dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\ dx = ?$$

بدلون:

$$u(x) = 3x + 6 = u$$

جوړوو:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\ du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:

$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\ dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

بیلګه :

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

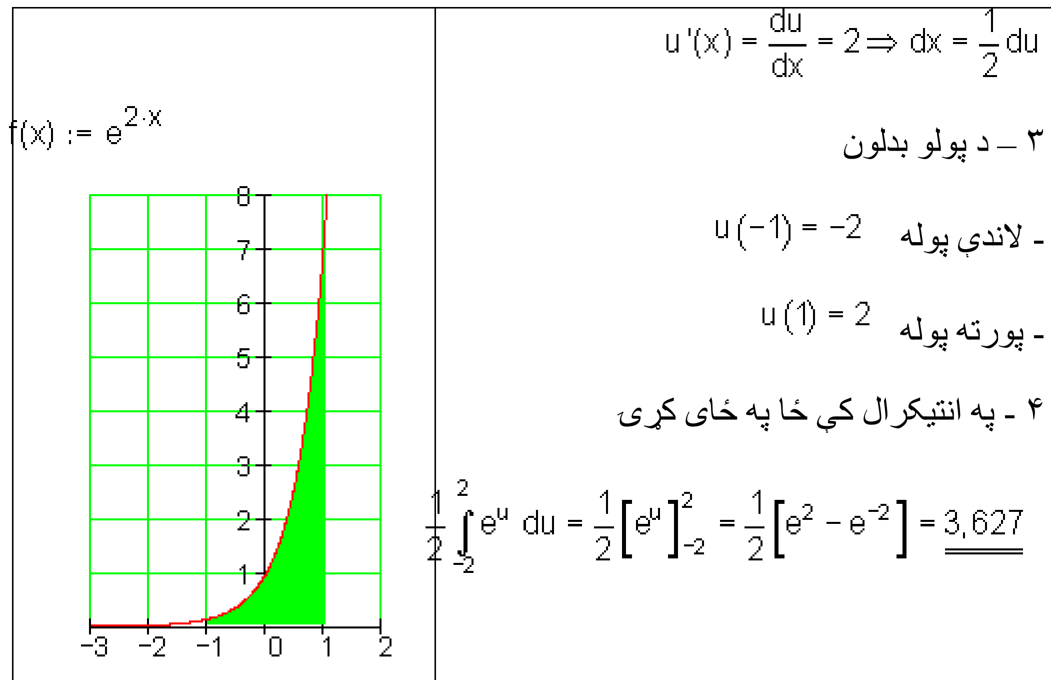
بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کیږدی



$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u \, du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3,627}}$$

بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$

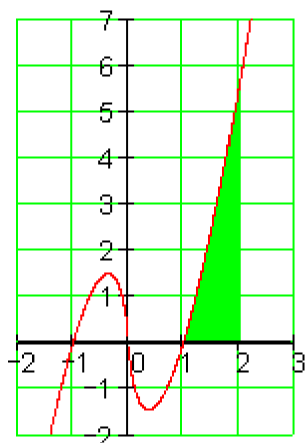
د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

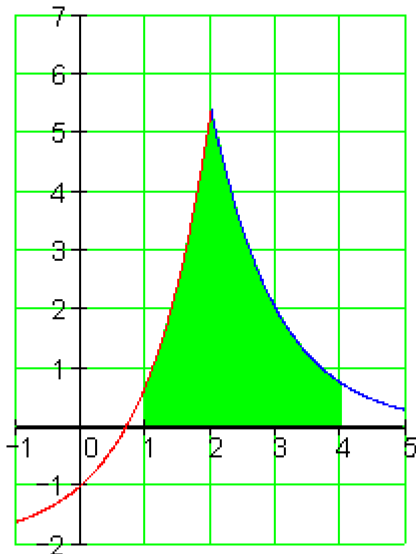
۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$ 	$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)\, dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لاري ۱ ــ بدلون $u(x) = x^2$ ۲ ــ د ځای په ځای کونه $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$ ۳ ــ د پولي بدلون - لاندې پوله $u(1) = 1$ - پورته پوله $u(2) = 4$ ۴ ــ په انتیګرال کې ځای په ځایکړی $\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$ $= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2,545}}$

بیلګه :



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7{,}331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینوول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندې چې $u = g (x)$ متمادي (نه پریکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f (u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx=\int f\,(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخې داسی دی

.

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du=\frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx}=f(u)\cdot u'=f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۱۳ . ۲۱ .) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك $f[g(x)]$ وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیکرېشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I=\int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int \cos u\,du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2= du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\,du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

د بنستیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځي په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لاینې ترم

) Term(پروت دی، کیدی شي چې د لایني بدلولو له لارې په بنستیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. دیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چې د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}u+C=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x)+C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چې د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2 - 1}\ dx$

بدلون:د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2} du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2} du = 2\int u^{\frac{1}{2}} du = 2 \cdot 2/3\, u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2 - x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (t) gبدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. :دا
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنستیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د x (t = h (x په بدلون له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف: $a)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$:

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعي ته بیایي، دلته $x= g(t) = (t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

--- --------------------------

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand دx توان یا e^x سره

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$\int x^2 e^x \, dx$ او $\int x^3 \sin(x) \, dx$

کېده شي په مدې لا حل شي:

يوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) \, dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالوني قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کيڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په خلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چي له منحني(y=f(x)، د x- محور (y=(0 او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چي y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعاليت:

--د يوې په خوښه تابع د منحني يا کرښې او د x محور ترمنځ او يا د دوه توابعو د سطحې شميرلو لپاره وړانديزونه وکړئ.

- دا هم د شميرلو لپاره په پام کې ونيسئ، که منحني يا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- يوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتيګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- يوه په خوښه تابع وليکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بيا وڅېړئ، چې ولې؟

يادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد وليکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونيول شي، چې د سطحې واحد(يوون) ور سره شته دی. که دا ورسره ليکل شوی نه وي، خو بايد تل په پام کې وي.

دا پورته فعاليتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

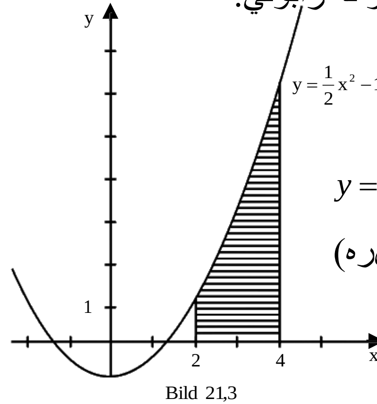


Bild 21,3

بيلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

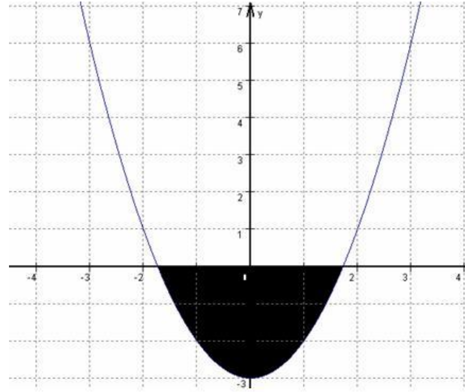
$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اينتيګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اينتيګرال مطلقه ارزښت نيسو يعني منفي اينتيګرال.

.



بېلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د تولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلکه:

د سطحې مساحت د $y = \frac{1}{2}x^3 - 5 \; , \; y = 0 \; , \; x_1 = -1 \; , \; x_2 = 2$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

$$A = |\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\;|$$

$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$

$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x\;)|_{-1}^{2}$$

$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

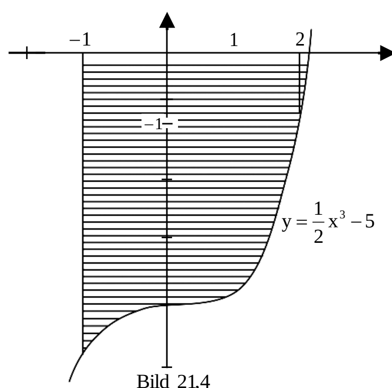
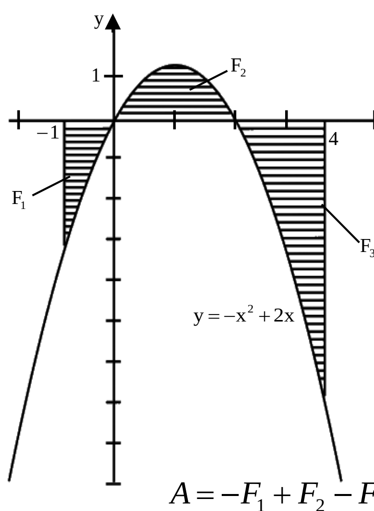


Bild 21,4

بیلګه:

د لاندې پولو x_1=-1 تر $x_2 = 4$ اودمنحني y=-x²+2x او y=0 ترمنځ دx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع y=-x²+2x, د x1=0 د صفرځایونو x_1=0 او x_2=2 تر منځ پرته غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)dx - \int_{2}^{4} (-x^2 + 2x)dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{2}^{4} = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کږې $y = -x^2 + 2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

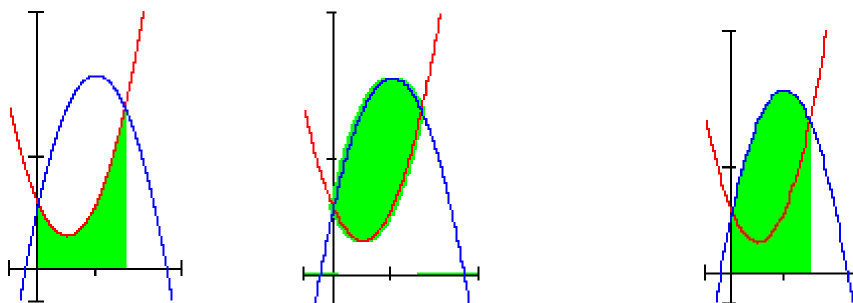
له دوه ګرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي¸چې له ګرو پولو را بند وي.

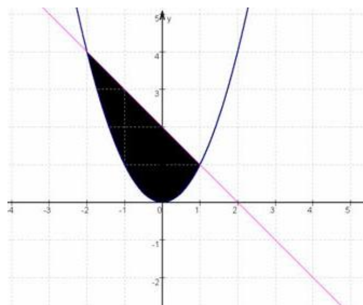
فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



$$A = A_1 - A_2$$



بيلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم يو شکل يا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتيګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه ليدل کيږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$= -1,5-6++=-4.5$$

$$A = 4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x)-g(x))dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

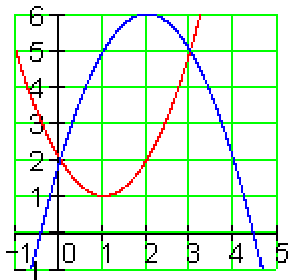
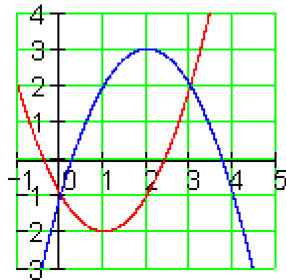
د اینتګرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څیږو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.	 

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = -x^2 + 4x - 1$$

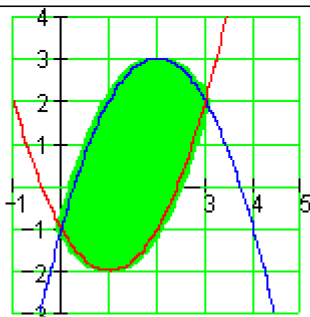
ځای په ځای کونه:
$$A = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کیږي:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 3x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9\right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}\right|$$

 	د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) : د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه: که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحنې څخه رابنده وي، چې تابع$f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي. $A = \left\|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right\|$

د انتیګرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوڅټکي دي

-- د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

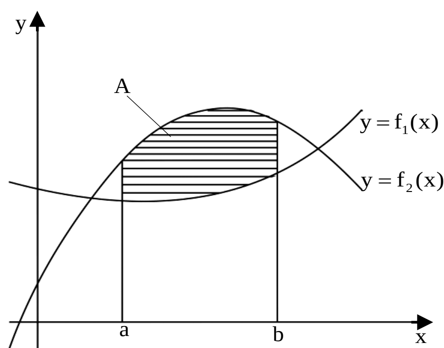


Bild 21,6

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې له $x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اینتیګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$
په $[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $(y=-x^2+1$

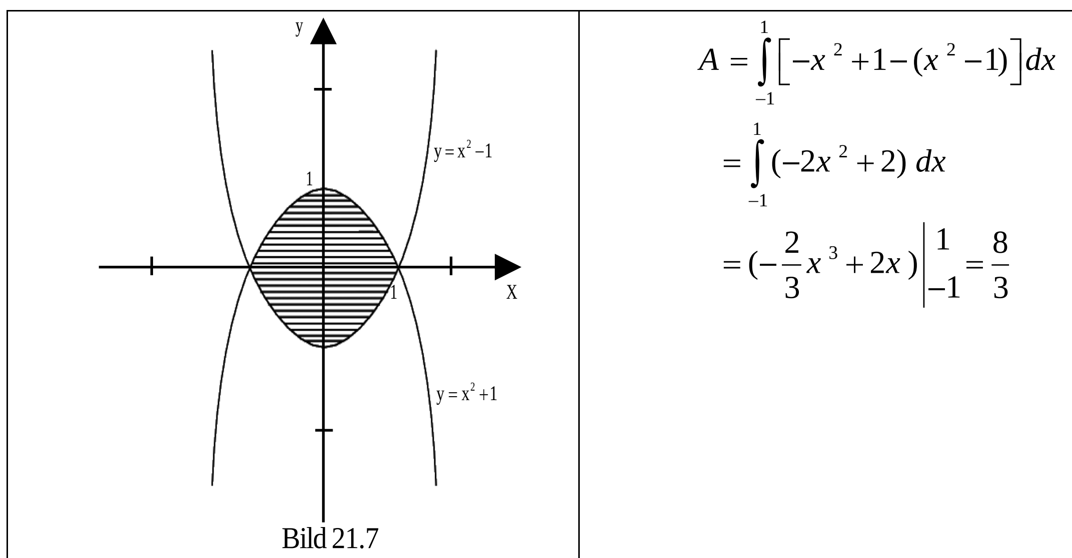
حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅټکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$
(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کې ونه نیول شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

Bild 21.7

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شمیرل کیږي.

$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

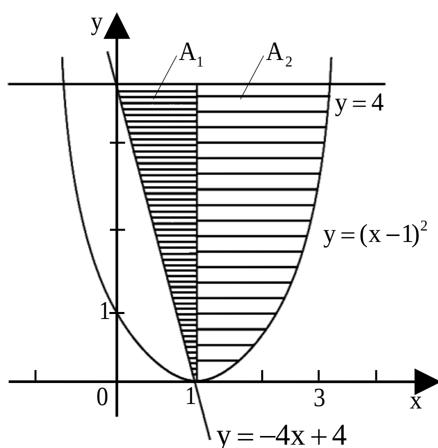


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوڅتکی دی، د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ x_1=0$ په همدې ډول د

ښي غوڅتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

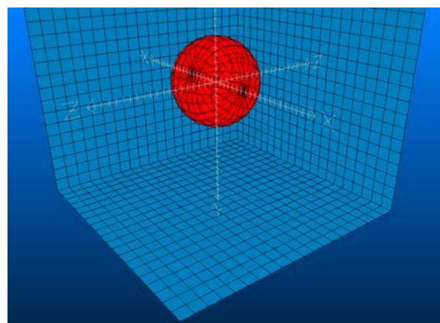
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د ښي غوښتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1\left[4-(-4x+4)\right]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وويل، حجم هم يو انتيګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که يوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د يوه څرخېدونکي جسم (بدن يا تن) حجم(ډکی)

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړيږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمیرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

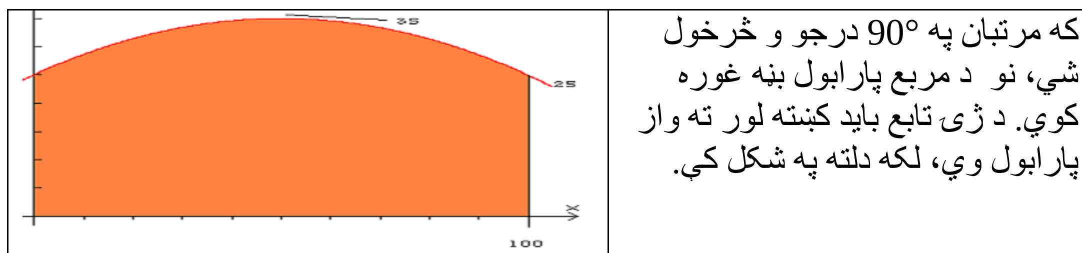
د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \ dx$$

د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.	50cm 70cm 100cm

---

	که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول -5 د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x)=-a\cdot(x-5)^2+3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع

$$f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیگرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\ dx$$

$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$

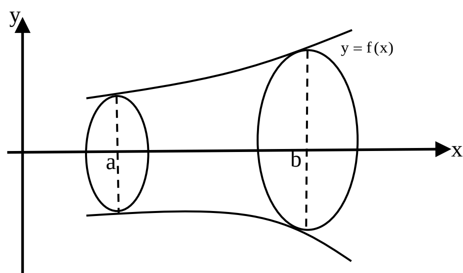
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$

$$=\pi\ \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیخیمتر شمیرنه کړې، نو طبعاً دا په لیتر شمیرل کیږي.

$$=317.824\ liter$$

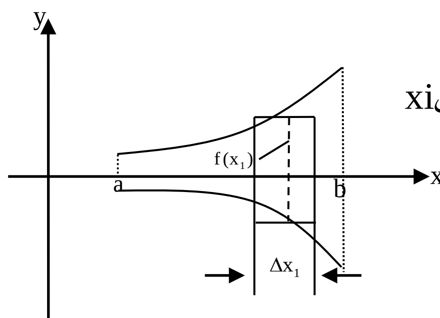


د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له لارې چی وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5 .10) دi-مې توتې (سلیندر ډکی(حجم) دی.

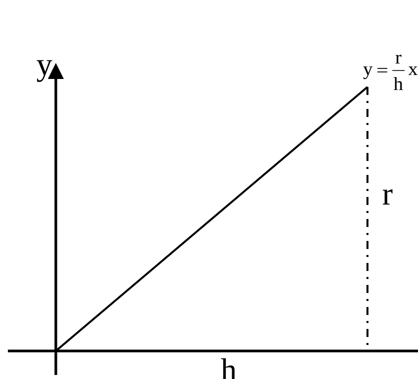
$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اینتیګرال د تعریف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښي (د سرچیني تیره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونوx=0 تر x=h

---

پورې(ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنسټيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ۵ . ۱۰:

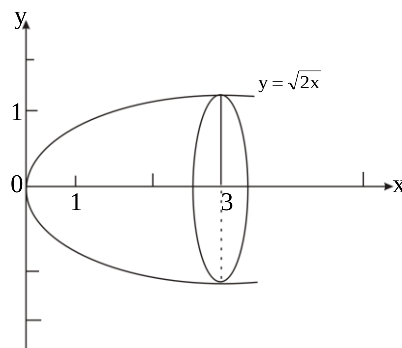
د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم څرخېدلی پارابولوييد دی (ځ ۵ ږ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښيميدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

د 1886 زک يوه درسي کتاب څخه



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

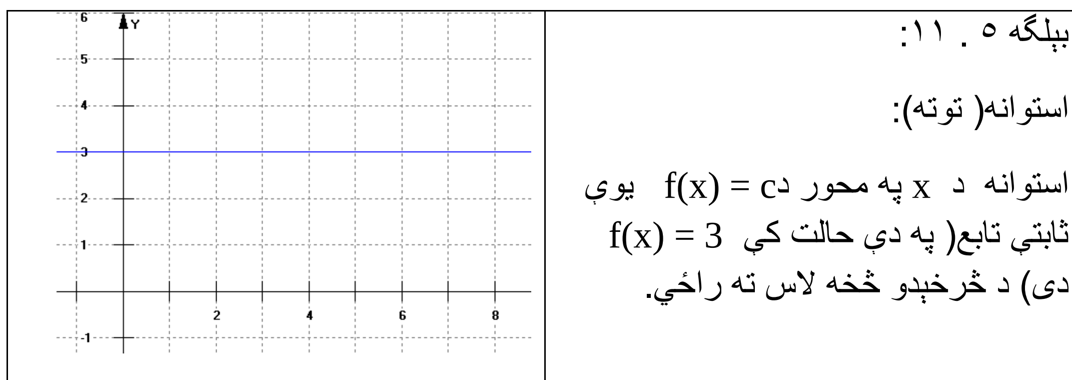
„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښيمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يي وموندده، له دې امله دا دلته راغلي جمله د ارښيمېډس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.



بېلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتي تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د يوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نيسو او غواړو يوه لار پيدا کړو ، چې د هغې لارې د انتيګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتيګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپای ډېرو مستطيلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالې dx سره) انتيګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

دا په دې معنا چې دا انتيګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد يوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

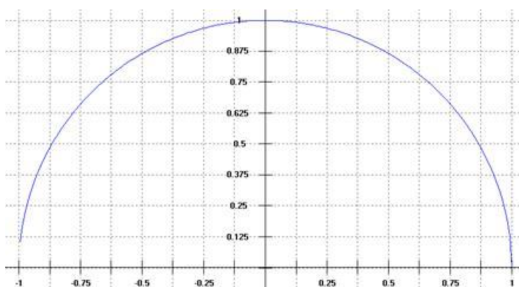
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری یا غنډوسکه(توپ)):



د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونداري يا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

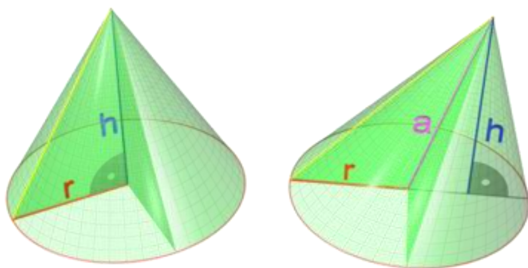
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځای څخه و صفر ځای ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، یعنې په انټروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظمn زاویو (اړخیزې(کونجیز) څخه رابندې بنسټیزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله مرستندویه لار. یو د کارتیزي وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کیږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي (h|0)کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توټې یا استواني ګردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قېمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په دېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسې y□ سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ ـ ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محوررونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$

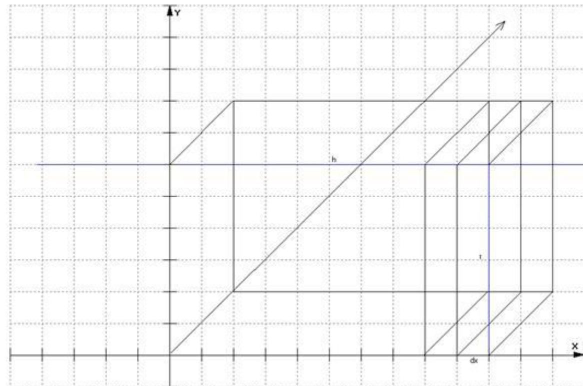
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16}\,dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

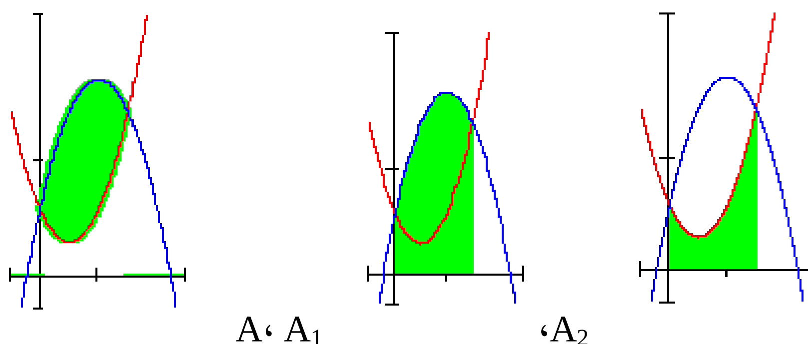
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژئ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه د x- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ،A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال
[a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$
ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف
دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$
بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي
یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه
شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا
ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو
$y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه (f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کټرو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسې y□ سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه
د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int(x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int(2/x^3)\,dx$, c) $\int(1/3)\sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, e) $\int\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx$, f) $\int(\sqrt[3]{x^4} + 1)\,dx$,

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسئ

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

---

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x\sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3\cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لاري یی اینتیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندي ټاكلي اینتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

---

۷ . د جملی ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یی (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \text{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \text{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو کرښو څخه راښده شوې وي

a) $y = e^{0,5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

---

k) $y = \frac{1}{x}$, $3y + 3x = 10$;

l) $y = \cos x$, $y = \sin x$;

m) $y = \sqrt{3x+1}$, $y = 1$, $x = 8$;

n) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{8}{4+x^2}$;

o) $y = x^2$, $x = y^2$;

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

q) $y = 2\sin x$, $y = \sqrt{3}\tan x$, $x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کږې $y = \tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیریږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د کږو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیرئ. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کږو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوې کږې ډکی څخه د کوچنۍ کږې ډکی کمیږي.

---

a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = h$;

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$

c) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

e) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2x$;

f) $y = 4x - x^2$, $y = 0$;

g) $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [0, \pi]$.

تراپیخ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یې دبل غبرګ وي) د کونجونو $(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیرئ

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

ب) د څرخيدونکی بدن ډکی

د کږو $y=\sqrt{x},\ \ y=0,\ y=-x+6$ ترمنځ هواره د x– محور

باندې څرخی، وشميری.

الف) د کږې غوښتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخويدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخيدونکی بدن ډکی وشميری، کوم چی په اينتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د x–محور پورته خواته د کږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x–محور باندې څرخيږي!

۱۴ نيمګردی $y=\sqrt{9-x}$ د x–محور باندې څرخيږي. د ګوډيبرخی ډکی

وشميری د پولو $x_1=1$, $x_2=3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخيدونکی ايليپسوئيد ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x–محور

پورته خوا ته پرته د ايليپسی نيمی هوارې د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

کږې سره د x–محور باندې توليدوي؟

د ځپرکي نور تمرينونه:

$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5}$ $\qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$

$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1}$ $\qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2}$ $\qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$

۱ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه ټول کسري پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په څېر وليکل شي.

۲ - لاندې پولينومونه د جمعې په څېر وليکئ

$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

۵ - د لاندې پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښايئ، چې د F تابع د f تابع لومړنۍ تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\dfrac{1}{x})dx \qquad f)\ \int(e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int\dfrac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int(2+e^x)dx \qquad l)\ \int(1+\ln x)dx \qquad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \dfrac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\dfrac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^{2} x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^{2}(\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{3})dx$

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$$

۱۷ــ هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx + \int_{5}^{3}3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2}e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5}2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2}x dx$$

۱۹ ــ د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x}5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x}e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2}x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بیرته په بنستیز اینتیگرال بدلون وروسته یي اینتیگرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلي اینتیگرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi}\cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\ dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیگرال وشمیري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3xdx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\qquad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\qquad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

---

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

---

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربې + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکني ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرړي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کي د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

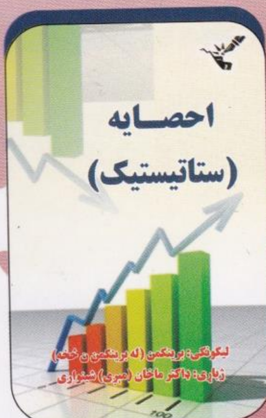
ماخان ميرړي په ۱۹۷۲ کي له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

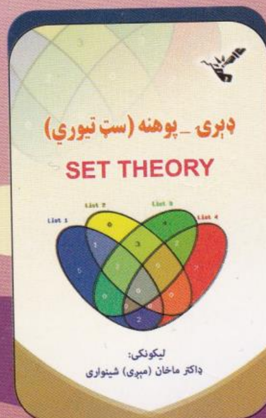
دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

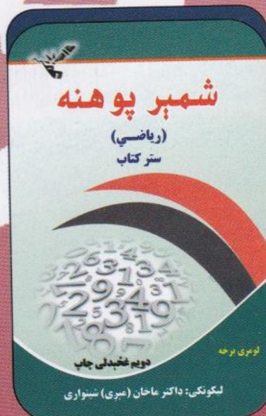
ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

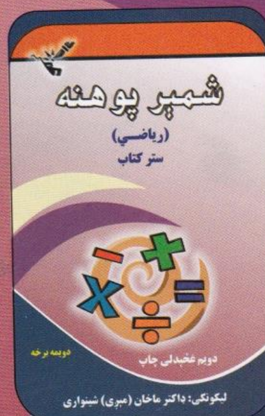


ډاکتر ماخان (میږی) شینواری









د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)